MATHEMATIK
IN MONOGRAPHIEN UND LEHRBÜCHERN

II

M. LAGALLY

VEKTOR-RECHNUNG

ZWEITE AUFLAGE

LEIPZIG
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

MATHEMATIK
UND IHRE ANWENDUNGEN
IN MONOGRAPHIEN UND LEHRBÜCHERN

HERAUSGEGEBEN VON

E. HILB

o. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG

BAND 2:

MAX LAGALLY

VORLESUNGEN ÜBER VEKTOR-RECHNUNG

LEIPZIG 1934

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

VORLESUNGEN

ÜBER

VEKTOR-RECHNUNG

VON

DR. MAX LAGALLY

o. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE
DRESDEN

Mit 77 Textfiguren

Zweite verbesserte Auflage
Photomechanischer Nachdruck

LEIPZIG 1934

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

Printed in Germany

Manuldruck von F. Ullmann G. m. b. H., Zwickau Sa.

Vorwort.

Diese Vorlesungen über Vektorrechnung unterscheiden sich nicht nur im Aufbau und Inhalt, sondern vor allem in der grundsätzlichen Auffassung über das Wesen und die Ziele der Vektorrechnung erheblich von der Mehrzahl der Bücher, die sich mit Vektoren beschäftigen. Der Vektorbegriff wird geometrisch anschaulich eingeführt, dann aber mit Methoden, die der Anschauung nahestehen, schrittweise vertieft und erweitert; so wird der Leser nicht nur mit der elementaren Vektorrechnung und Feldertheorie und mit der Dyadenrechnung vertraut gemacht, sondern es wird auch ein Zugang zu der Tensoranalysis gewonnen, die durch die Erfolge der Relativitätstheorie aktuell geworden ist und heute ausgedehnte Gebiete der Mathematik und mathematischen Physik beherrscht.

Die Vektorrechnung ist in den letzten Jahrzehnten weiten Kreisen bekannt und geläufig geworden, und hat sich in physikalischen und technischen Lehrbüchern und Zeitschriften eingebürgert. Aber ausgebreitet hat sie sich dabei nur wenig. In ihrer Anwendung bleibt sie in der Hauptsache auf einzelne Gebiete, wie analytische und technische Mechanik, Hydrodynamik, Elektrodynamik beschränkt. In die Elastizitätstheorie z. B. ist sie kaum eingedrungen; zwar ist in modernen Darstellungen viel von Verzerrungs- und Spannungsdyade die Rede, aber es wird selten mit diesen Dyaden selbst operiert; vielmehr herrscht in der Elastizitätstheorie noch die Darstellung in Koordinaten fast unbeschränkt. Dieses Beispiel ist typisch; überall, wo man mit den einfachsten Operationen der Vektorrechnung ausreicht, wird die dadurch erreichte Freiheit von einem willkürlichen Koordinatensystem als schätzenswerter Gewinn begrüßt, aber das Operieren mit Dyaden und Tensoren höherer Stufe wird vermieden; wo die Einführung des Begriffs der Dyade unvermeidlich wird, vermeidet man es wenigstens, sie als ein Ding, eine Größe, eine Zahl aufzufassen und durch ein Symbol zu bezeichnen. Statt auf das Gebäude der elementaren Vektorrechnung noch ein Stockwerk aufzusetzen, kehrt man zur Koordinatenrechnung zurück. Ge-

rade die formale Dyadenrechnung aber ist der Schlüssel, der mit leichtester Mühe und auf kürzestem Wege alle die Probleme zugänglich macht, bei deren Untersuchung zwei Felder auftreten, die durch affine Abbildung oder eine lineare Vektorfunktion in Beziehung gesetzt sind.

Gegen die Dyadenrechnung werden nicht selten die gleichen Gründe ins Feld geführt wie vor ein paar Jahrzehnten gegen die Vektorrechnung überhaupt; hierauf einzugehen erübrigt sich. Die wirklichen Ursachen der Widerstände gegen die Dyadenrechnung sind andere. Die Begründung der Dyadenrechnung ist abstrakt; sie zu erlernen, bedarf es Ausdauer und Glauben an den Erfolg der aufgewendeten Mühe. Wer die Vektorrechnung als Hilfswissenschaft betrachtet und von jeder neuen Operation möglichst sofort Anwendungsmöglichkeiten sehen möchte, fühlt sich abgestoßen. In den meisten Lehrbüchern der Vektorrechnung wird überdies die Dyadenrechnung erst gegen Ende gebracht; der schon etwas ermüdete und durch die plötzlich beginnende abstrakte Darstellung erschreckte Leser erwartet nichts mehr von grundsätzlicher Wichtigkeit. Ich habe deshalb die Grundzüge der Dyadenrechnung bereits im ersten, der elementaren Vektoralgebra gewidmeten Kapitel gebracht; ihre Wichtigkeit kann nicht früh genug und nicht stark genug betont werden. Die genauere Theorie der Dyaden mit ihren geometrischen Anwendungen ist einem späteren Kapitel vorbehalten, an das sich ein besonderes Kapitel über die wichtigsten Dyaden der Mechanik, Trägheits-, Verzerrungs- und Spannungsdyade und das Hookesche Gesetz schließt.

Ein weiterer Grund, der die Einbürgerung der Dyadenrechnung bisher erschwert hat, scheint mir in der Frage der Bezeichnung zu liegen. Von den Festsetzungen über die Bezeichnung der einfachsten Vektoroperationen wird man verlangen müssen, daß sie der Weiterentwicklung der Vektorrechnung keine Schwierigkeiten in den Weg legen. Das in Deutschland meist gebrauchte System der Bezeichnungen des Ausschusses für Einheiten und Formelzeichen läßt sich aber, so bequem es für die einfachsten Operationen sein mag, auf die Operationen der Tensorrechnung ohne ziemlich künstliche Zusätze nicht erweitern; es erschwert deshalb die Ausbildung und Ausbreitung dieser Rechnungsart. An folgerichtigen Systemen der Bezeichnungen ist kein Mangel; ich verwende in meinen Vorlesungen das von Gibbs angewendete System, das ich zwar nicht für das bestmögliche, aber doch für das beste unter den bestehenden

Systemen halte. Auf Einzelheiten über diese viel diskutierte Frage einzugehen, möchte ich an dieser Stelle vermeiden.

Dem Streben nach Anschaulichkeit bei der Einführung des Vektorbegriffs und beim Aufbau der Theorie entspricht es, daß geometrische Betrachtungen nicht nur zur Ableitung von Sätzen, sondern auch zu Anwendungen der abgeleiteten Theorien herangezogen werden. Beides ist oft kaum zu trennen. Im übrigen erfordert die Auswahl der Anwendungsgebiete Beschränkung. Durch die gesamte vektorielle Behandlung der Differentialgeometrie zieht sich ein kinematischer Gedanke; es liegt nahe, das zwangsläufig hereinkommende kinematische Anwendungs- oder besser Anschauungsgebiet zum Gebiet der Mechanik mit Einschluß der Mechanik der Kontinua und der Potentialtheorie zu erweitern. Damit glaubte ich aber ausreichen zu können. Die Wahl von Beispielen aus den verschiedensten Teilen der theoretischen Physik scheint mir neben der Gefahr der Zersplitterung noch eine weitere Gefahr zu bergen: man setzt sich leicht dem Vorwurf aus, aus einem unermeßlich weiten Gebiet verhältnismäßig wenige, besonders günstige Beispiele herausgegriffen zu haben, die damit ihre Beweiskraft für die Anwendungsfähigkeit der vorgetragenen Theorien verlieren.

Was insbesondere die Geometrie betrifft, so gehört sie zu denjenigen Gebieten, in die die formale Vektorrechnung nur langsam eindringt. Ich bin deshalb länger bei der vektoriellen Behandlung der Differentialgeometrie verweilt, als es in deutschen Lehrbüchern der Vektorrechnung üblich ist, und habe einige Abschnitte dem Aufbau einer natürlichen Geometrie gewidmet, die sich in ihren Ergebnissen mit der natürlichen Geometrie Cesaros deckt, während sie sich methodisch erheblich davon unterscheidet. Die Geometrie gibt aber auch die Mittel an die Hand, die Transformationstheorie der Vektoren anschaulich zu begründen und dadurch zu einer Verschärfung des Vektorbegriffs zu kommen, der schließlich noch eine Erweiterung erfährt durch die Untersuchung der Vektoren in mehrdimensionalen und Riemannschen Räumen. Diese letzten Untersuchungen haben Beziehung zur Relativitätstheorie, gehen aber über deren Erfordernisse weit hinaus; sie dürfen neben mannigfacher praktischer Anwendbarkeit der Ergebnisse auch ein rein mathematisches Interesse beanspruchen. Die Vektoren der Relativitätstheorie und der Riemannschen Räume einerseits und die der euklidischen Geometrie und Mechanik anderseits sind auf den ersten Blick nicht als Dinge gleicher Natur zu erkennen; hier

klafft eine Lücke im wesentlichen methodischer Art, die ich zu überbrücken bestrebt war. Dieser Versuch bedeutet ein Wagnis, nicht nur mit Rücksicht auf die Abneigung weiter Kreise gegen die Verwendung formaler Vektoroperationen in der Relativitätstheorie. Auch wer für die Verwendung der Vektoren und Tensoren selbst an Stelle ihrer Maßzahlen eintritt, wird zugeben müssen, daß die Möglichkeit, sich bei Untersuchungen allgemeiner Art vom Bezugssystem vollständig frei zu machen, auf Räume mit euklidischer Metrik beschränkt ist; Untersuchungen in höheren Räumen sind vielmehr methodisch denjenigen Untersuchungen im euklidischen Raum gleichzustellen, bei denen ein allgemeines Bezugssytsem von 3 Scharen von Parameterkurven zugrunde gelegt ist. Diesem Nachteil steht eine Reihe erheblicher Vorzüge gegenüber, von denen ich einige hervorheben möchte. Zunächst sei auf die Einführung der absoluten Differentiation und linearen Übertragung hingewiesen; sie wird durch Verwendung des Vektors selbst an Stelle seiner Maßzahlen der euklidischen Anschauung näher gebracht als durch jede andere Art der Begründung, und die Formeln erhalten einen unmittelbar greifbaren Sinn bei Spezialisierung auf den euklidischen Raum. Ähnlich erhält der Krümmungstensor eine anschauliche geometrische Bedeutung im engsten Zusammenhang mit dem Krümmungsmaß einer Fläche. Von prinzipiell tieferer Bedeutung ist ein weiterer Vorzug. Wegen des Invariantencharakters eines als komplexe Zahl höherer Stufe definierten Tensors erübrigt sich für jede derartige als invariant erkannte Form der Nachweis der Tensoreigenschaft, die bei alleiniger Verwendung der Tensormaßzahlen aus ihrem Verhalten gegenüber den Transformationen des Koordinatensystems erwiesen werden müßte.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich seit einer Reihe von Jahren an den Technischen Hochschulen München und Dresden vor Studierenden der Ingenieurwissenschaften, der Physik und der Mathematik gehalten habe. Sein Inhalt verteilt sich auf drei Stufen. Während in einer Einführungsvorlesung über höhere Mathematik nur die einfachsten Grundtatsachen der Vektorrechnung zur Sprache kommen, bietet eine Vorlesung über Vektorrechnung Raum für Feldertheorie und Dyadenrechnung. Schwierigere sowie mehr ins einzelne gehende Theorien habe ich gelegentlich in Spezialvorlesungen vor einem engen Kreis und in Seminarien behandelt. Einer derartigen Gelegenheit verdankt auch der letzte, anhangsweise zugefügte Abschnitt über höhere komplexe Zahlen

seine Entstehung; dieser fällt zwar methodisch vollständig aus dem Rahmen des Buches heraus, doch liegt gerade darin seine Bedeutung, da er die Möglichkeit erkennen läßt, die Vektorrechnung auch nach ganz anderen Gesichtspunkten aufzubauen; überdies ergibt sich dabei eine Gelegenheit, auch die Hamiltonschen Quaternionen und die Vektoren der Gaußschen Zahlenebene, sowie die neuerdings wichtig gewordenen dualen Vektoren und Misesschen Motoren zur Sprache zu bringen.

Die Darstellung bedient sich der Freiheiten, welche Vorlesungen gegenüber dem methodisch straffen Aufbau eines Lehrbuchs bieten. Die Entwicklung ist vielfach durch Anwendungen unterbrochen oder durch Ableitung von Hilfssätzen aufgehalten; bei der Wiederaufnahme des Fadens werden Wiederholungen nicht gescheut. Das Buch ist in erster Linie zum Gebrauch neben der Vorlesung gedacht; da das Studium der Vektorrechnung, wenn sie zum lebendigen mathematischen Werkzeug werden soll, gar nicht früh genug begonnen werden kann, stellen die ersten Kapitel an die mathematischen Kenntnisse des Lesers nur außerordentlich bescheidene Anforderungen. Mit dem Fortschreiten seiner mathematischen Bildung mag der Studierende auch in der Lektüre des Buches fortschreiten; die letzten Abschnitte sind fast ausschließlich für Mathematiker bestimmt und werden Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften nur bei besonderer theoretischer Veranlagung interessieren.

Bei der Niederschrift des Buches hat mich mein früherer Hörer und Assistent, Herr Dr. Fritz Müller, Dresden, unermüdlich unterstützt und beraten; er hat auch die Figuren gezeichnet und mir bei der Korrektur geholfen. Für seine treue Mitarbeit möchte ich ihm auch an dieser Stelle herzlichen Dank aussprechen. Für wertvolle Ratschläge bei der Korrektur bin ich mehreren Fachgenossen zu Dank verpflichtet, besonders den Herren E. Hilb, W. Krull und nicht zuletzt meinem Freund und Lehrer S. Finsterwalder, der auch noch in anderer Weise an dem Zustandekommen dieses Buches beteiligt ist, nämlich als der erste, der mich selbst in die Vektorrechnung eingeführt und mein Interesse dafür geweckt hat.

Dresden, im Januar 1928. **Lagally.**

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel 1. Elementare Vektor-Algebra.

§ 1. Begriff des Vektors; Summe von Vektoren.

§ 2. Skalares Produkt.

§ 3. Vektorprodukt.

§ 4. Mehrfache Produkte.

§ 5. Unbestimmtes Produkt.

§ 2. Infinitesimale Verzerrungen.

§ 3. Spannungszustand.

§ 4. Elastische Spannungen.

Kapitel 6. Transformationstheorie.

§ 1. Transformation der Basis und der Maßzahlen.

§ 3. Differentialinvarianten.

§ 4. Geometrische Theorie des Krümmungstensors.

Kapitel 8. Komplexe Zahlen.

§ 1. Eigenschaften der allgemeinen komplexen Zahlen.

§ 2. Zusammenhang mit der Vektorrechnung.

Kapitel 1. Elementare Vektor-Algebra.

§ 1. Begriff des Vektors; Summe von Vektoren.

1. Translation. Eine Bewegung des Raumes, bei der sämtliche Punkte gleichlange und gleichgerichtete Strecken zurücklegen, heißt Translation. Die Kenntnis einer beliebigen dieser Strecken genügt zur vollständigen Bestimmung der Translation. In diesem Sinn sind die von sämtlichen Punkten des Raumes zurückgelegten Strecken gleichwertig, ihr Ausgangspunkt ist unwesentlich. Wenn man zur Kennzeichnung der Translation ein Zeichen $\mathfrak{v}$ verwendet, so kennzeichnet dieses Zeichen auch das geometrische Bild der Translation, die gerichtete Strecke.

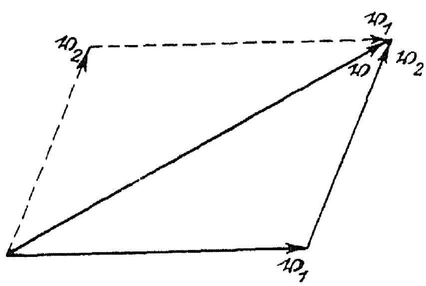


Fig. 1.

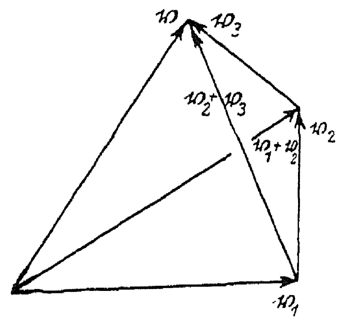


Fig. 2.

Durch Aufeinanderfolge zweier Translationen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ entsteht eine resultierende Translation $\mathfrak{v}$. Das geometrische Bild für die Zusammensetzung zweier Translationen ist die Zusammensetzung zweier gerichteter Strecken in der Art, daß die Strecke $\mathfrak{v}_2$ vom Endpunkt von $\mathfrak{v}_1$ aus angetragen wird. $\mathfrak{v}$ ist dann die Schlußseite des entstehenden Dreiecks, durchlaufen vom Anfangspunkt von $\mathfrak{v}_1$ bis zum Endpunkt von $\mathfrak{v}_2$. Die Zusammensetzung wird unter Verwendung des Pluszeichens durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 \tag{1}$$

ausgedrückt, weil sie den Charakter einer Summation besitzt. Nämlich:

Wenn $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ gleichgerichtet sind, geht die Bildung der resultierenden Translation in eine gewöhnliche Summation über. Auch im allgemeinen Falle gilt das *kommutative* Gesetz:

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1,$$

das die Unabhängigkeit der Resultante von der Reihenfolge zum Ausdruck bringt, in der die *Komponenten*, d. i. die Translationen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ zusammengesetzt werden (*Parallelogramm der Bewegungen*) (Fig. 1).

Ferner gilt das *assoziative* Gesetz:

$$(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) + \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + (\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3),$$

das die Eindeutigkeit der Resultante von mehr als zwei Komponenten ausdrückt (Fig. 2). Es ist also zulässig, die Summe von mehr als zwei Summanden ohne Klammer zu schreiben:

$$(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) + \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3.$$

Wie die Summe zweier Translationen ihr Bild in der Diagonalen des Parallelogramms der Bewegungen findet, so wird die Summe von drei nicht zu einer Ebene parallelen Translationen durch die Diagonale des Parallelepipedes der Bewegungen dargestellt. Umgekehrt läßt sich jede Translation eindeutig in *Komponenten* nach drei beliebig vorgegebenen, nicht zu einer Ebene parallelen Richtungen zerlegen (Fig. 3):

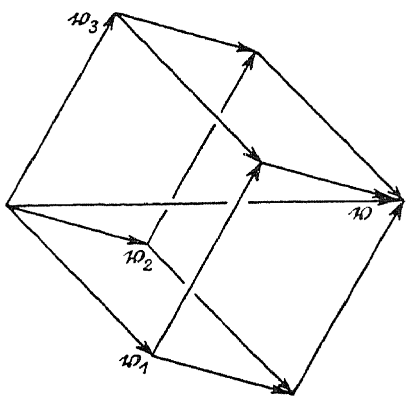


Fig. 3.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3. \qquad (2)$$

Jetzt ist auch die Summe von n Translationen

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \cdots + \mathfrak{v}_n$$

eindeutig bestimmt. Ihr geometrisches Bild ist die *Schlußseite eines Streckenzuges*, der durch Aneinandersetzen von n gerichteten Strecken $\mathfrak{v}_1$ bis $\mathfrak{v}_n$ entsteht; die Schlußseite ist zu durchlaufen vom Anfangspunkt von $\mathfrak{v}_1$ bis zum Endpunkt von $\mathfrak{v}_n$. Ist der Streckenzug geschlossen, so ist die Summe Null.

Die Translation, die $\mathfrak{v}$ rückgängig macht, ist mit $-\mathfrak{v}$ zu bezeichnen, da die Summe beider Translationen Null ist. Die Bilder der Translationen $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ fallen in dieselbe Gerade: eine Gerade soll *eine Richtung* im Raum besitzen, sie kann aber in

zweierlei Richtungssinn durchlaufen werden, wovon willkürlich der eine als positiver Richtungssinn festgesetzt und dann oft kurz als positive Richtung bezeichnet wird. Es ist also $-\mathfrak{v}$ eine Translation von entgegengesetztem Richtungssinn (oder kürzer entgegengesetzter Richtung) wie $\mathfrak{v}$. Damit ist die Differenz $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ zweier Translationen auf die Summe $\mathfrak{v}_1 + (-\mathfrak{v}_2)$ zurückgeführt. —

Die durch n-malige Wiederholung der Translation $\mathfrak{v}$ entstehende Translation wird mit $n\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}n$ bezeichnet. Diese zunächst für ganzzahlige n eingeführte Bezeichnung läßt sich so verallgemeinern, daß sie für jedes positive oder negative n einen Sinn besitzt; man kann dann alle Translationen einer Richtung durch eine von ihnen $\mathfrak{v}$ und eine positive oder negative Maßzahl n in der Form $n\mathfrak{v}$ darstellen.

Für diese Vervielfachung einer Translation gilt das distributive Gesetz in den beiden Formen

$$(m+n)\,\mathfrak{v} = m\mathfrak{v} + n\mathfrak{v},$$
$$n\,(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = n\mathfrak{v}_1 + n\mathfrak{v}_2;$$

ferner das assoziative Gesetz

$$m\,(n\mathfrak{v}) = (mn)\,\mathfrak{v} = mn\mathfrak{v}.$$

Der Beweis ist geometrisch einfach.

2. Vektoren. Die zur Veranschaulichung einer Translation eingeführte gerichtete Strecke mit freizuwählendem Anfangspunkt wird in der Regel als Vektor bezeichnet. Eine derartige Einführung des Begriffes Vektor ist aber nicht ganz genügend.

Das Zeichen $\mathfrak{v}$, das bisher dazu gedient hat, die Translation und ihr geometrisches Bild, die gerichtete Strecke, zu kennzeichnen, soll von nun an zur Bezeichnung eines noch genauer zu definierenden Gedankendinges, einer „Zahl“ von höherer Art dienen, die geeignet ist, die Translation eindeutig zu bestimmen. Diese „Zahl“ heißt Vektor.

Diese Einführung des Vektors schließt die Forderung in sich, daß die Zusammensetzung zweier Translationen durch die Addition zweier Vektoren zum Ausdruck gebracht wird. Es beziehen sich also die bisherigen, für Translationen aufgestellten Formeln auf das Rechnen mit Vektoren.

Wenn $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ gleichgerichtet sind, geht die Bildung der resultierenden Translation in eine gewöhnliche Summation über. Auch im allgemeinen Falle gilt das kommutative Gesetz:

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1,$$

das die Unabhängigkeit der Resultante von der Reihenfolge zum Ausdruck bringt, in der die Komponenten, d.i. die Translationen $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ zusammengesetzt werden (Parallelogramm der Bewegungen) (Fig. 1).

Ferner gilt das assoziative Gesetz:

$$(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) + \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + (\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3),$$

das die Eindeutigkeit der Resultante von mehr als zwei Komponenten ausdrückt (Fig. 2). Es ist also zulässig, die Summe von mehr als zwei Summanden ohne Klammer zu schreiben:

$$(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) + \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3.$$

Wie die Summe zweier Translationen ihr Bild in der Diagonalen des Parallelogramms der Bewegungen findet, so wird die Summe von drei nicht zu einer Ebene parallelen Translationen durch die Diagonale des Parallelepipedes der Bewegungen dargestellt. Umgekehrt läßt sich jede Translation eindeutig in Komponenten nach drei beliebig vorgegebenen, nicht zu einer Ebene parallelen Richtungen zerlegen (Fig. 3):

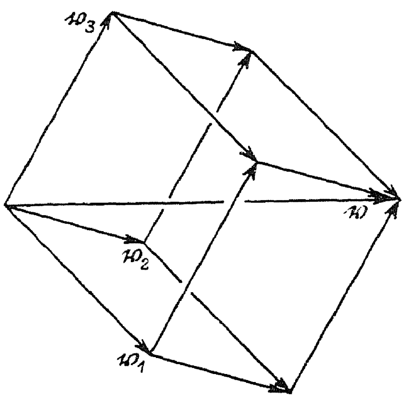


Fig. 3.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3. \tag{2}$$

Jetzt ist auch die Summe von n Translationen

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \cdots + \mathfrak{v}_n$$

eindeutig bestimmt. Ihr geometrisches Bild ist die Schlußseite eines Streckenzuges, der durch Aneinandersetzen von n gerichteten Strecken $\mathfrak{v}_1$ bis $\mathfrak{v}_n$ entsteht: die Schlußseite ist zu durchlaufen vom Anfangspunkt von $\mathfrak{v}_1$ bis zum Endpunkt von $\mathfrak{v}_n$. Ist der Streckenzug geschlossen, so ist die Summe Null.

Die Translation, die $\mathfrak{v}$ rückgängig macht, ist mit $-\mathfrak{v}$ zu bezeichnen, da die Summe beider Translationen Null ist. Die Bilder der Translationen $\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ fallen in dieselbe Gerade; eine Gerade soll eine Richtung im Raum besitzen, sie kann aber in

zweierlei Richtungssinn durchlaufen werden, wovon willkürlich der eine als positiver Richtungssinn festgesetzt und dann oft kurz als positive Richtung bezeichnet wird. Es ist also $-\mathfrak{v}$ eine Translation von entgegengesetztem Richtungssinn (oder kürzer entgegengesetzter Richtung) wie $\mathfrak{v}$. Damit ist die Differenz $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2$ zweier Translationen auf die Summe $\mathfrak{v}_1 + (-\mathfrak{v}_2)$ zurückgeführt. —

Die durch n-malige Wiederholung der Translation $\mathfrak{v}$ entstehende Translation wird mit $n\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}n$ bezeichnet. Diese zunächst für ganzzahlige n eingeführte Bezeichnung läßt sich so verallgemeinern, daß sie für jedes positive oder negative n einen Sinn besitzt; man kann dann alle Translationen einer Richtung durch eine von ihnen $\mathfrak{v}$ und eine positive oder negative Maßzahl n in der Form $n\mathfrak{v}$ darstellen.

Für diese Vervielfachung einer Translation gilt das distributive Gesetz in den beiden Formen

$$(m+n)\,\mathfrak{v} = m\mathfrak{v} + n\mathfrak{v},$$
$$n\,(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = n\mathfrak{v}_1 + n\mathfrak{v}_2;$$

ferner das assoziative Gesetz

$$m\,(n\mathfrak{v}) = (mn)\,\mathfrak{v} = mn\mathfrak{v}.$$

Der Beweis ist geometrisch einfach.

2. Vektoren. Die zur Veranschaulichung einer Translation eingeführte gerichtete Strecke mit freizuwählendem Anfangspunkt wird in der Regel als Vektor bezeichnet. Eine derartige Einführung des Begriffes Vektor ist aber nicht ganz genügend.

Das Zeichen $\mathfrak{v}$, das bisher dazu gedient hat, die Translation und ihr geometrisches Bild, die gerichtete Strecke, zu kennzeichnen, soll von nun an zur Bezeichnung eines noch genauer zu definierenden Gedankendinges, einer „Zahl“ von höherer Art dienen, die geeignet ist, die Translation eindeutig zu bestimmen. Diese „Zahl“ heißt Vektor.

Diese Einführung des Vektors schließt die Forderung in sich, daß die Zusammensetzung zweier Translationen durch die Addition zweier Vektoren zum Ausdruck gebracht wird. Es beziehen sich also die bisherigen, für Translationen aufgestellten Formeln auf das Rechnen mit Vektoren.

Der Vektor ist eine arithmetische Größe, keine geometrische. Es ist also unzulässig oder mindestens unzulänglich, den Vektor als gerichtete Strecke zu definieren, und zwar auch dann, wenn man das Gesetz der Addition mit in die Definition hineinnimmt. Schon Graßmann war sich darüber klar, „daß es einen Zweig der Mathemathik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen.“ Die Vektoren sind eine besondere Art derjenigen „Zahlen“, welche man als komplexe Zahlen höherer Art oder als extensive Zahlen bezeichnet.

Geometrische oder physikalische Größen, die durch Angabe eines Vektors bestimmt sind, heißen vektorielle Größen oder Vektorgrößen. Solche sind neben der Translation und der gerichteten Strecke alle Arten von Größen, die den Translationen eindeutig zugeordnet werden können und für deren Zusammensetzung dieselben Gesetze gelten wie für die der Translationen, z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Auch die Kraft ist nach den Elementen der Statik eine Vektorgröße, doch sagt der sie bestimmende Vektor nur über Größe und Richtung der Kraft, nicht aber über ihre Angriffslinie etwas aus, läßt also ein wesentliches mechanisches Element unbestimmt. Daß die Winkelgeschwindigkeit eine Vektorgröße ist, bedarf eines Beweises, der den Summencharakter der Resultierenden zweier Winkelgeschwindigkeiten klarstellt; gleiches gilt vom Drehmoment (Ziff. 13). Dagegen sind z. B. endliche Drehungen keine Vektorgrößen, denn, obwohl die endlichen Drehungen den gerichteten Strecken eindeutig zugeordnet werden können, entspricht die Resultierende zweier Drehungen nicht der geometrischen Summe der gerichteten Strecken.

Vektorgrößen werden häufig in ungenauer Weise selbst als Vektoren bezeichnet, z. B. Verschiebungsvektor, Kraftvektor. Namentlich gilt das, wie schon eingangs erwähnt, für das geometrische Bild eines Vektors, die gerichtete Strecke; auch im folgenden ist der Gebrauch des Wortes Vektor in diesem Sinn zugelassen. Überhaupt wird, nachdem einmal die eindeutige Beziehung zwischen dem Vektor als Gedankending und seinem geometrischen Bild erkannt ist, wenigstens im ersten Teil des Buches von der geometrischen Anschauung in weitgehendem Maß Gebrauch gemacht und der größte Teil der Theorie der Vektoren aus ihrem geometrischen Bild entwickelt.

Oft ist es nützlich, Vektorgrößen durch gerichtete Strecken darzustellen, die von einem fest gewählten Anfangspunkt, etwa vom Ursprung eines Koordinatensystems ausgehen. Eine solche gerichtete Strecke heißt Ortsvektor; sie charakterisiert die Lage ihres Endpunktes. Anderseits wird vielfach, z. B. in Kraftfeldern, jedem Raumpunkt ein Vektor zugewiesen und als „gebundener“ Vektor durch eine von dem Punkt ausgehende gerichtete Strecke dargestellt. Ein solcher Vektor heißt Feldvektor.

Der Gegensatz zwischen freiem und gebundenem Vektor, wie er schon in dem Unterschied zwischen Verschiebungs- und Kraftvektor zutage getreten ist, liegt in der Natur der Begriffe, zu deren Beschreibung die Vektoren dienen, und bezieht sich nicht auf die Vektoren selbst.

3. Skalare. Maßzahlen und Komponenten. Die Gesamtheit aller der Maßzahl nach verschiedenen Translationen in einer Richtung ist durch die Gesamtheit aller positiven und negativen Zahlen bestimmt. Da diese Maßzahlen den Punkten einer Skala (Zahlengerade), etwa den Endlagen eines beliebig angenommenen Ausgangspunktes bei allen Translationen in der gewählten Richtung eindeutig zugeordnet werden können, heißen sie skalare Zahlen oder Skalare.

Geometrische oder physikalische Größen, die durch Angabe des numerischen Wertes eines Skalars bestimmt sind, heißen skalare Größen; z. B. außer der Gesamtheit der Maßzahlen der Translationen in einer Richtung folgende: Teilungsverhältnis, Winkel, Zeit, Temperatur, Masse, Potential.

Alle Vektoren $\mathfrak{v}$ einer Richtung lassen sich mit Hilfe eines von ihnen, des Grundvektors $\mathfrak{e}$, und einer skalaren (positiven oder negativen) Maßzahl x in der Form

$$\mathfrak{v} = x\mathfrak{e} \qquad (3)$$

angeben.

Nach (2) läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{v}$ nach drei beliebig vorgegebenen, nicht zu einer Ebene parallelen Richtungen in Komponenten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ zerlegen (Fig. 4). Bei Einführung dreier in diese Richtungen fallender Grundvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,

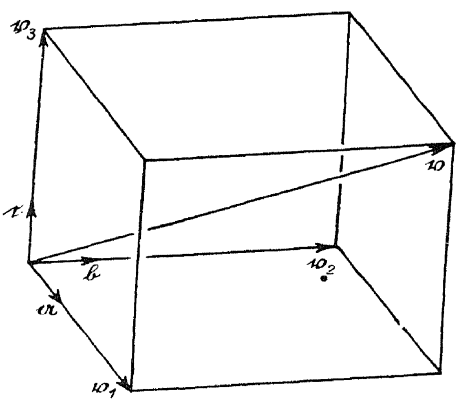


Fig. 4.

der „Basis“, erhält nach (2) und (3) der Vektor die Form

$$\mathfrak{v} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}; \tag{4}$$

dabei treten drei Maßzahlen x, y, z auf, die oft auch als Koordinaten des Vektors bezeichnet werden. Man denkt dabei etwa den Vektor $\mathfrak{v}$ als Ortsvektor aufgetragen; dann sind x, y, z die (im allgemeinen schiefwinkligen) Koordinaten seines Endpunkts in dem durch die drei vorgegebenen Richtungen bestimmten Koordinatensystem, wobei als Maßstäbe in diesen Richtungen die Längen der Grundvektoren zu gelten haben.

Zum Unterschied von den Maßzahlen oder Koordinaten des Vektors sind die drei Vektoren $x\mathfrak{a}, y\mathfrak{b}, z\mathfrak{c}$ die Komponenten des Vektors[1]. —

Ein Vektor ist durch Angabe dreier Skalare bestimmt, wenn die Basis als bekannt vorausgesetzt wird.

Ein Vektor ist Null, wenn seine Maßzahlen bei Einführung irgendeiner Basis Null sind.

Zwei Vektoren sind gleich, wenn ihre entsprechenden Maßzahlen, bei Verwendung derselben Basis, paarweise gleich sind.

Eine Vektorgleichung ist drei skalaren Gleichungen gleichwertig.

4. Lineare Beziehung. Aus der Zerlegbarkeit jedes Vektors nach drei Grundvektoren folgt, daß zwischen irgend vier Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ eine lineare Beziehung von der Form (4)

$$\mathfrak{v}_4 = n_1\mathfrak{v}_1 + n_2\mathfrak{v}_2 + n_3\mathfrak{v}_3$$

besteht; symmetrisch geschrieben

$$p_1\mathfrak{v}_1 + p_2\mathfrak{v}_2 + p_3\mathfrak{v}_3 + p_4\mathfrak{v}_4 = 0$$

oder

$$\sum p_\nu \mathfrak{v}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Häufig kann man diese Beziehung in folgender Weise aufstellen: Zerlegt man die vier Vektoren $\mathfrak{v}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ nach drei Grundvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in der Form (4)

$$\mathfrak{v}_\nu = x_\nu\mathfrak{a} + y_\nu\mathfrak{b} + z_\nu\mathfrak{c} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

1) Vielfach werden die Maßzahlen der Komponenten, also die Koordinaten, selbst als Komponenten bezeichnet. Dieses Schwanken der Bezeichnung und ihre Verwendung für zwei verschiedene Begriffe ist in den folgenden Ausführungen vermieden. Nur in Kap. 5 ist bei einigen mechanischen Begriffen (z. B. den Wirbel„komponenten“) mit Rücksicht auf den herrschenden Gebrauch eine Ausnahme gemacht.

wobei x_ν, y_ν, z_ν die Koordinaten von $\mathfrak{v}_\nu$ sind, so ergibt sich durch Elimination von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die gesuchte Beziehung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \mathfrak{v}_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \mathfrak{v}_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \mathfrak{v}_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Sind drei Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ einer Ebene parallel (komplanare Vektoren), so besteht zwischen ihnen eine lineare Beziehung. Man kann dann nämlich $\mathfrak{v}_3$ in Komponenten zerlegen in Richtung $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$:

$$\mathfrak{v}_3 = n_1\mathfrak{v}_1 + n_2\mathfrak{v}_2$$

oder in symmetrischer Schreibweise:

$$\Sigma p_\nu \mathfrak{v}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Sind die drei Vektoren $\mathfrak{v}_\nu$ wie oben auf eine beliebige Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezogen, so zerfällt (6) in drei skalare Gleichungen

$$\Sigma p_\nu x_\nu = 0; \quad \Sigma p_\nu y_\nu = 0; \quad \Sigma p_\nu z_\nu = 0.$$

Aus diesen folgt, wenn die p_ν von Null verschieden sind, die Verträglichkeits-Bedingung

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

als Kennzeichen dafür, daß $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ komplanar sind. —

Daß ebenso zwischen zwei Vektoren gleicher Richtung (kollineare Vektoren) eine lineare Beziehung besteht, ist schon der Inhalt der Gleichung (3).

§ 2. Skalares Produkt.

5. Betrag eines Vektors; Einheitsvektor. Um zu Produktbildungen von Vektoren zu gelangen, kann man sich des geometrischen Bildes der Vektoren, der gerichteten Strecken, bedienen.

Die 3 Skalare, welche eine gerichtete Strecke bestimmen, können in verschiedener Weise gewählt werden. Z. B. läßt sich die gerichtete Strecke durch die rechtwinkligen Koordinaten ihres Endpunkts in einem Koordinatensystem bestimmen, dessen Scheitel in den Anfangspunkt der Strecke fällt. Oder die gerichtete Strecke kann durch Angabe zweier Winkel, welche ihre Richtung und ihren Richtungssinn bestimmen, etwa geographische Länge und Breite,

und durch Angabe ihrer stets positiv genommenen Länge, ihres *Betrags*, festgelegt werden, wie das zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke im Erdfeld durch Deklination, Inklination und Intensität gebräuchlich ist.

Ein Vektor vom Betrag Eins heißt *Einheitsvektor*. Jeder Vektor läßt sich als Produkt aus seinem Betrag und einem Einheitsvektor darstellen, der mit dem Vektor nach Richtung und Richtungssinn übereinstimmt. Vielfach ist es gebräuchlich, jedoch nicht allgemein durchführbar, einen allgemeinen Vektor mit großem, den zugehörigen Einheitsvektor mit dem entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben zu bezeichnen ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$); den Betrag mit $|\mathfrak{A}|$ oder mit lateinischem Buchstaben (a). Dann wird die Produktdarstellung

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|\,\mathfrak{a}$$

oder

$$\mathfrak{A} = a\,\mathfrak{a}. \tag{8}$$

Diese Gleichung (8) reicht weniger weit als die ähnlich gebaute Gleichung (3), insofern als Grundvektor in (8) ein Einheitsvektor auftritt und *als Maßzahl der stets positive Betrag*.

6. Einführung des skalaren Produkts. Bezeichnet man die Länge zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit a und b und ihren Winkel mit ϑ (Fig. 5), so heißt

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = ab\cos\vartheta \tag{9}$$

das *skalare Produkt* der beiden Vektoren; gelesen: $\mathfrak{A}$ Punkt $\mathfrak{B}$.

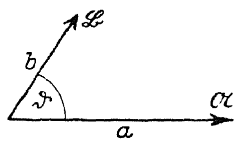


Fig. 5.

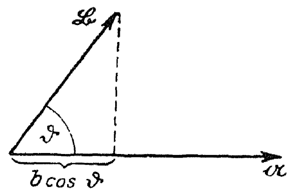


Fig. 6.

Das so definierte skalare Produkt zweier Vektoren ist das Produkt aus der Länge des einen Vektors und der Projektion des andern auf ihn. Ist der eine der Faktoren ein Einheitsvektor $\mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{B} = b\cos\vartheta$$

die Projektion des zweiten Vektors auf die durch den Einheitsvektor bestimmte Richtung (Fig. 6).

Der heuristisch eingeführte Ausdruck (9) ist von der Basis unabhängig, also *invariant* gegenüber einem Wechsel der Basis,

und besitzt ähnliche Eigenschaften wie das Produkt zweier skalarer Zahlen.

Es gilt nach (9) das kommutative Gesetz

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}$$

und das assoziative Gesetz in Verbindung mit der Multiplikation mit einem Skalar:

$$(n\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{B}=n(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})=n\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B};$$

ferner folgt aus dem Projektionssatz die Gültigkeit des distributiven Gesetzes:

$$\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}.$$

Anderseits bestehen zwischen den Gesetzen der skalaren Multiplikation der Vektoren und der gewöhnlichen Multiplikation skalarer Zahlen tiefgreifende Unterschiede: Es existiert kein skalares Produkt von mehr als zwei Faktoren, also kommt ein assoziatives Gesetz für die skalare Multiplikation selbst nicht in Frage. Ferner genügt die Kenntnis des Produktes und des einen Faktors nicht zur eindeutigen Bestimmung des anderen; es gibt keine Division als Umkehrung der skalaren Multiplikation. Ist ein skalares Produkt Null, so folgt daraus nicht mit Notwendigkeit das Verschwinden des einen Faktors; es kann ein skalares Produkt auch dadurch Null werden, daß $\cos\vartheta=0$ ist, also die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Die Bedingung des Senkrechtstehens zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, deren Beträge von Null verschieden sind, ist

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=0. \tag{10}$$

Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn haben, reduziert sich das skalare Produkt der Vektoren auf das Produkt ihrer Beträge

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=ab.$$

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist das Quadrat seines Betrags[1])

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}=a^2; \tag{11}$$

also der Betrag

$$|\mathfrak{A}|=\sqrt{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}}. \tag{11'}$$

1) Die vielfach gebrauchte Bezeichnung $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^2$ ist etwas bedenklich, da die allgemeinere Bezeichnung $\mathfrak{A}^n$ später (Ziff. 118) in anderem Sinn verwendet wird.

Für das skalare Produkt zweier Einheitsvektoren, bzw. eines Einheitsvektors mit sich selbst gilt [vgl. (9), (11)]

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \cos \vartheta, \tag{12}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = 1. \tag{13}$$

Die Einführung des skalaren Produktes kann als Ausgangspunkt für die Einführung der metrischen Beziehung in die Rechnung und für die Möglichkeit der Längenvergleichung von Strecken verschiedener Richtung dienen.

7. Auftreten des skalaren Produkts in der Mechanik. Wie schon in Ziff. 2 erwähnt, ist die Kraft eine Vektorgröße.

Wenn der Angriffspunkt einer Kraft $\mathfrak{K}$ (vom Betrag K) in Richtung eines Einheitsvektors $\mathfrak{s}$, der mit der Kraftrichtung den Winkel ϑ bildet, um eine Strecke s verschoben wird, so ist

$$K \cos \vartheta = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s}$$

die Maßzahl der in die Richtung $\mathfrak{s}$ fallenden Komponente von $\mathfrak{K}$ und

$$A = K s \cos \vartheta = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{S} \tag{14}$$

die Arbeit der Kraft auf dem Wege $\mathfrak{S} = s\mathfrak{s}$ (Fig. 7).

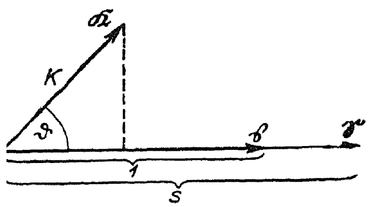


Fig. 7.

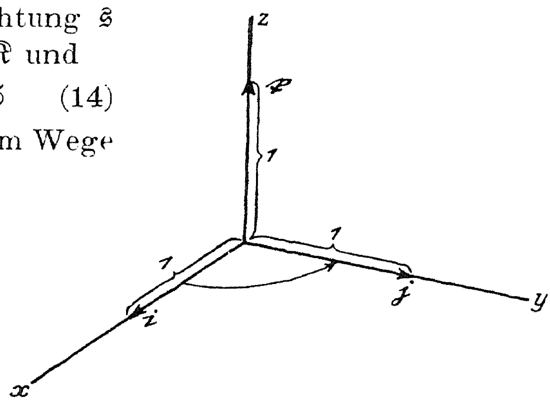


Fig. 8.

8. Ein Dreibein als Basis. Es soll jetzt das skalare Produkt zweier Vektoren bestimmt werden, wenn ihre Maßzahlen (Koordinaten) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben sind. Dieses soll ein Rechtssystem sein (Fig. 8): Denkt man sich die positive x-Achse auf dem kürzesten Wege, d. h. über den Winkel von 90° in die positive y-Achse gedreht, so soll die positive z-Achse nach der Seite hin verlaufen, von der aus die Drehung positiv, d. h. der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt erscheint. Die Drehung der x- gegen die y-Achse und die Fortschreitung in Richtung der z-Achse bestimmen zusammen eine Rechtsschraube.

Als Grundvektoren werden drei Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in Richtung der positiven x, y, z-Achse gewählt. Ein System von

drei, paarweise auf einander senkrechten Einheitsvektoren heißt D r e i b e i n.

Für die skalaren Produkte je zweier Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ eines Dreibeins gilt [nach (10), (13)]

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k} = 1; \\ \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{i} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Wird ein Vektor in die Form

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$$

gesetzt, so sind die Maßzahlen x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten seines Endpunktes, wenn $\mathfrak{r}$ als Ortsvektor aufgetragen wird.

Das skalare Produkt zweier Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{i}a_1 + \mathfrak{j}a_2 + \mathfrak{k}a_3, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{i}b_1 + \mathfrak{j}b_2 + \mathfrak{k}b_3 \end{aligned}$$

nimmt nach (15) unter Benützung des assoziativen Gesetzes folgenden Wert an:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_\nu a_\nu b_\nu. \tag{16}$$

Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf einander senkrecht stehen, ist

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \tag{17}$$

Das skalare Produkt des Vektors $\mathfrak{A}$ mit sich selbst, also das Quadrat seines Betrages, ist

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} = a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2,$$

der Betrag selbst ist

$$a = |\mathfrak{A}| = \left|\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\right|. \tag{18}$$

In dieser Formel liegt der p y t h a g o r ä i s c h e L e h r s a t z. — Der Winkel zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmt sich nach (9) unter Benützung von (16) und (18) aus

$$\cos\vartheta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\left|\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\right| \left|\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}\right|}. \tag{18'}$$

Diese Formeln sollen jetzt für Einheitsvektoren spezialisiert werden. Die Koordinaten eines Einheitsvektors sind nichts anderes als seine R i c h t u n g s c o s i n u s. Sind also

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{i}\cos\alpha_1 + \mathfrak{j}\cos\alpha_2 + \mathfrak{k}\cos\alpha_3, \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{i}\cos\beta_1 + \mathfrak{j}\cos\beta_2 + \mathfrak{k}\cos\beta_3 \end{aligned}$$

zwei Einheitsvektoren, so ist

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \cos\vartheta = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3. \tag{19}$$

Das skalare Produkt eines Einheitsvektors $\mathfrak{a}$ mit sich selbst ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = 1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 . \tag{20}$$

Diese Gleichung drückt den bekannten Satz aus, daß die Summe der Quadrate der drei Richtungscosinus einer Geraden gleich 1 ist. —

Aus einem beliebigen Vektor $\mathfrak{A}$ läßt sich nach (18) der Einheitsvektor seiner Richtung abspalten durch Division mit seinem Betrag

$$\left| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right| .$$

9. Formeln für Drehung des Koordinaten-Systems und Spiegelung. Zwischen den Achsen zweier rechtwinkliger Koordinatensysteme x, y, z mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ mit den Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{i}}, \bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}$ (mit gemeinsamem Anfangspunkt) treten 9 Winkel auf, deren Cosinus die skalaren Produkte je zweier Einheitsvektoren sind. Es heiße (in der Figur 9 nur zum Teil eingetragen)

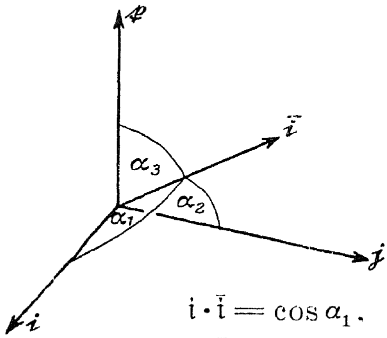


Fig. 9.

$$\begin{aligned} \mathfrak{i} \cdot \bar{\mathfrak{i}} &= \cos\alpha_1, & \mathfrak{j} \cdot \bar{\mathfrak{i}} &= \cos\alpha_2, & \mathfrak{k} \cdot \bar{\mathfrak{i}} &= \cos\alpha_3, \\ \mathfrak{i} \cdot \bar{\mathfrak{j}} &= \cos\beta_1, & \mathfrak{j} \cdot \bar{\mathfrak{j}} &= \cos\beta_2, & \mathfrak{k} \cdot \bar{\mathfrak{j}} &= \cos\beta_3 . \\ \mathfrak{i} \cdot \bar{\mathfrak{k}} &= \cos\gamma_1, & \mathfrak{j} \cdot \bar{\mathfrak{k}} &= \cos\gamma_2, & \mathfrak{k} \cdot \bar{\mathfrak{k}} &= \cos\gamma_3 . \end{aligned} \tag{21}$$

Zwischen diesen 9 Richtungscosinus bestehen [nach (19), (20)] 4 Gruppen von je 3 Gleichungen von der Form

$$\begin{gathered} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 , \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 , \\ \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3 = 0 , \\ \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0 , \end{gathered} \tag{22}$$

von denen die ersten $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{i}}, \bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}$ als Einheitsvektoren charakterisieren und die letzten die beiden Koordinatensysteme als rechtwinklig.

Von den 9 Winkeln würden 3 genügen, um die Lage der beiden Systeme gegeneinander zu bestimmen; es müssen also 6 Gleichungen zwischen den 9 Winkeln bestehen. Von den 12 Gleichungen (22) sind infolgedessen (höchstens) 6 voneinander unabhängig und die andern 6 eine Folge von ihnen. —

Da die Maßzahlen eines Einheitsvektors seine Richtungscosinus

sind, lassen sich die Transformationsformeln für die Einheitsvektoren sofort hinschreiben: (23a)

$$\begin{array}{l|l} \bar{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}\cos\alpha_1 + \mathfrak{j}\cos\alpha_2 + \mathfrak{k}\cos\alpha_3, & \mathfrak{i} = \bar{\mathfrak{i}}\cos\alpha_1 + \bar{\mathfrak{j}}\cos\beta_1 + \bar{\mathfrak{k}}\cos\gamma_1, \\ \bar{\mathfrak{j}} = \mathfrak{i}\cos\beta_1 + \mathfrak{j}\cos\beta_2 + \mathfrak{k}\cos\beta_3, & \mathfrak{j} = \bar{\mathfrak{i}}\cos\alpha_2 + \bar{\mathfrak{j}}\cos\beta_2 + \bar{\mathfrak{k}}\cos\gamma_2, \\ \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{i}\cos\gamma_1 + \mathfrak{j}\cos\gamma_2 + \mathfrak{k}\cos\gamma_3, & \mathfrak{k} = \bar{\mathfrak{i}}\cos\alpha_3 + \bar{\mathfrak{j}}\cos\beta_3 + \bar{\mathfrak{k}}\cos\gamma_3. \end{array}$$

Um auch die Transformationsformeln für die Koordinaten zu erhalten, bemerkt man, daß ein beliebiger Ortsvektor $\mathfrak{r}$ in der doppelten Form

$$\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z = \bar{\mathfrak{i}}\bar{x} + \bar{\mathfrak{j}}\bar{y} + \bar{\mathfrak{k}}\bar{z}$$

geschrieben werden kann. Multipliziert man diese Gleichung skalar nacheinander mit $\bar{\mathfrak{i}}, \bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}$, dann mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, so erhält man ein System von Gleichungen, die genau so gebaut sind wie die Transformationsformeln (23a) für die Einheitsvektoren: (23b)

$$\begin{array}{l|l} \bar{x} = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3, & x = \bar{x}\cos\alpha_1 + \bar{y}\cos\beta_1 + \bar{z}\cos\gamma_1, \\ \bar{y} = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3, & y = \bar{x}\cos\alpha_2 + \bar{y}\cos\beta_2 + \bar{z}\cos\gamma_2, \\ \bar{z} = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3, & z = \bar{x}\cos\alpha_3 + \bar{y}\cos\beta_3 + \bar{z}\cos\gamma_3. \end{array}$$

Damit sind sämtliche Transformationsformeln gewonnen ohne Benutzung der aus der Determinantentheorie bekannten Eigenschaften der orthogonalen Transformation.

Die Transformationsdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

ist übrigens leicht zu berechnen. Man bildet zunächst nach dem Laplaceschen Multiplikationssatz der Determinanten unter Benutzung von (22) ihr Quadrat:

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Also ist

$$D = \pm 1. \tag{24}$$

Beide Fälle treten ein; die orthogonalen Transformationen zerfallen in 2 Arten. Für die der ersten Art ist $D = +1$; sie bilden eine Gruppe. Jede von ihnen kann durch kontinuierlichen Übergang aus der Identität $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$ erhalten werden, die ebenfalls die Determinante $D = +1$ besitzt und also zur Gruppe

gehört. Geometrisch stellen sie die Drehungen des Koordinatensystems dar.

Für die orthogonalen Transformationen der zweiten Art ist $D = -1$; die Aufeinanderfolge zweier von ihnen gibt eine Transformation mit der Determinante $+1$; sie bilden also für sich allein keine Gruppe, sondern nur mit der Gruppe der Drehungen zusammen. Ein Beispiel läßt die geometrische Bedeutung erkennen: $\bar{x} = x$; $\bar{y} = y$; $\bar{z} = -z$ gibt die Spiegelung des Koordinatensystems an der x, y-Ebene; das Rechtssystem x, y, z geht dabei in ein Linkssystem $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ über. So kann jede Transformation der zweiten Art durch Umkehrung einer Achsenrichtung des Koordinatensystems in eine Drehung und eine Spiegelung an einer Koordinatenebene zerlegt werden.

Jede Transformation der zweiten Art führt ein Rechtssystem in ein Linkssystem über, während jede Transformation der ersten Art den Charakter des Koordinatensystems aufrecht erhält.

10. Invarianz des skalaren Produkts. Wie bereits Ziff. 6 hervorgehoben wurde, ist das skalare Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seiner geometrischen Definition zufolge eine vom Koordinatensystem unabhängige, invariante Größe.

Darüber hinaus zeigt auch der analytische Ausdruck für das skalare Produkt einen vom Koordinatensystem unabhängigen Aufbau aus den Maßzahlen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wenigstens wenn man sich wie bisher auf rechtwinklige Koordinatensysteme beschränkt und als Basis je ein mit dem Koordinatensystem verbundenes Dreibein verwendet.

Die beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien bezogen auf zwei rechtwinklige, also durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführbare Koordinatensysteme:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} a_1 + \mathfrak{j} a_2 + \mathfrak{k} a_3 = \bar{\mathfrak{i}} \bar{a}_1 + \bar{\mathfrak{j}} \bar{a}_2 + \bar{\mathfrak{k}} \bar{a}_3;$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{i} b_1 + \mathfrak{j} b_2 + \mathfrak{k} b_3 = \bar{\mathfrak{i}} \bar{b}_1 + \bar{\mathfrak{j}} \bar{b}_2 + \bar{\mathfrak{k}} \bar{b}_3.$$

Dann ist das skalare Produkt, für beide Koordinatensysteme gebildet,

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \bar{a}_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_3 \bar{b}_3; \qquad (25)$$

bei der Berechnung hat man die skalaren Produkte je zweier Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ ebenso nach (15) zu bilden wie die von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Anderseits kann die Invarianz des Ausdrucks $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ auch als unmittelbare Folge der orthogonalen Transformation betrachtet werden. Setzt man nach (23b)

$$a_1 = \bar{a}_1 \cos\alpha_1 + \bar{a}_2 \cos\beta_1 + \bar{a}_3 \cos\gamma_1,$$
$$a_2 = \bar{a}_1 \cos\alpha_2 + \bar{a}_2 \cos\beta_2 + \bar{a}_3 \cos\gamma_2,$$
$$a_3 = \bar{a}_1 \cos\alpha_3 + \bar{a}_2 \cos\beta_3 + \bar{a}_3 \cos\gamma_3;$$

und ebenso

$$b_1 = \bar{b}_1 \cos\alpha_1 + \bar{b}_2 \cos\beta_1 + \bar{b}_3 \cos\gamma_1,$$
$$b_2 = \bar{b}_1 \cos\alpha_2 + \bar{b}_2 \cos\beta_2 + \bar{b}_3 \cos\gamma_2,$$
$$b_3 = \bar{b}_1 \cos\alpha_3 + \bar{b}_2 \cos\beta_3 + \bar{b}_3 \cos\gamma_3,$$

so erkennt man im Hinblick auf (23a) und (23b), daß der Aufbau des Ausdrucks $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ durch die orthogonale Transformation ebensowenig geändert wird wie der des Ausdrucks $\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$, da die Einheitsvektoren durch dieselben Gleichungen transformiert werden wie die Koordinaten.

Aus der Invarianz des skalaren Produkts folgt die Invarianz der Längen und Winkel, da diese durch skalare Produkte ausdrückbar sind.

11. Die Eulerschen Winkel. Der Übelstand, daß sich unter den 9 Richtungscosinus der Winkel, welche von den Achsen zweier rechtwinkliger Koordinatensysteme gebildet werden, 6 überzählige befinden, läßt sich in verschiedener Weise beseitigen. Eine von Cayley angegebene Methode, die Bedingungsgleichungen (22), die zwischen den 9 Koeffizienten einer orthogonalen Transformation bestehen, durch rationale Funktionen dreier Parameter zu erfüllen, kommt später (Ziff. 152) zur Sprache. Jetzt soll ein von Euler angegebener Weg begangen werden, die beiden Koordinatensysteme durch drei geeignet gewählte Winkel gegeneinander festzulegen (Fig. 10).

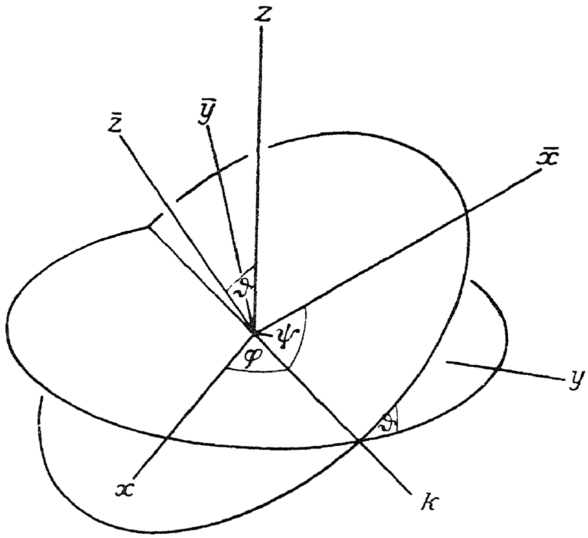


Fig. 10.

Die beiden Koordinatensysteme seien wie bisher mit x, y, z und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, die zugehörigen Einheitsvektoren mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bzw. $\bar{\mathfrak{i}}, \bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}$ bezeichnet. Die Ebenen x, y und $\bar{x}, \bar{y}$ mögen sich in der

„Knotenlinie“ K, deren positiver Richtung ein Einheitsvektor $\mathfrak{t}_1$ zugehören soll, unter dem Winkel ϑ schneiden. Der Winkel der x-Achse mit der Knotenlinie sei φ, der der Knotenlinie mit der $\bar{x}$-Achse ψ. Die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme ist durch die 3 Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ bestimmt.

Um die Bestimmung eindeutig zu machen, muß die Definition der 3 Eulerschen Winkel verschärft werden. Beide Systeme sind als Rechtssysteme vorausgesetzt. Der Winkel φ ist positiv zu rechnen, wenn die Drehung der x-Achse in die Knotenlinie von einem Punkt der positiven z-Achse aus positiv erscheint; der Winkel ψ ist positiv, wenn die Drehung der Knotenlinie in die $\bar{x}$-Achse von einem Punkt der positiven $\bar{z}$-Achse aus positiv erscheint; der Winkel ϑ ist positiv, wenn die Drehung der z-Achse in die $\bar{z}$-Achse von einem Punkt der positiven Knotenlinie aus positiv erscheint.

Man bemerkt, daß sich die Drehung des Systems x, y, z mit dem Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in das System $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ mit dem Dreibein $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ durch eine Aufeinanderfolge dreier einfach zu beschreibender Drehungen bewerkstelligen läßt.

1. Eine Drehung mit dem Winkel φ um die z-Achse führt das Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in ein Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{k}$ über, wo $\mathfrak{t}_1$, wie erwähnt, der Einheitsvektor der Knotenlinie ist, $\mathfrak{t}_2$ in der x, y-Ebene auf der Knotenlinie senkrecht steht. Die zugehörigen Transformationsformeln sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 &= \mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi \\ \mathfrak{t}_2 &= -\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi \\ \mathfrak{k} &= \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

2. Eine Drehung mit dem Winkel ϑ um die Knotenlinie führt das Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{k}$ in ein Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_3$, $\bar{\mathfrak{k}}$ über, wo $\mathfrak{t}_3$ in der $\bar{x}$, $\bar{y}$-Ebene auf der Knotenlinie senkrecht steht. Die zugehörigen Transformationsformeln sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 &= \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_3 &= \mathfrak{t}_2\cos\vartheta + \mathfrak{k}\sin\vartheta \\ \bar{\mathfrak{k}} &= -\mathfrak{t}_2\sin\vartheta + \mathfrak{k}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

3. Eine Drehung mit dem Winkel ψ um die $\bar{z}$-Achse führt das Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_3$, $\bar{\mathfrak{k}}$ in das Dreibein $\bar{\mathfrak{i}}$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{\mathfrak{k}}$ über. Die zugehörigen Transformationsformeln sind:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{i}} &= \mathfrak{t}_1\cos\psi + \mathfrak{t}_3\sin\psi \\ \bar{\mathfrak{j}} &= -\mathfrak{t}_1\sin\psi + \mathfrak{t}_3\cos\psi \\ \bar{\mathfrak{k}} &= \bar{\mathfrak{k}}. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ aus den Transformationsformeln erhält man sofort die Transformationsformeln für die Einheitsvektoren beider Koordinatensysteme:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{i}} &= \mathfrak{i}\,[\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi] \\ &\qquad + \mathfrak{j}\,[\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi] + \mathfrak{k}\sin\vartheta\sin\psi \\ \bar{\mathfrak{j}} &= \mathfrak{i}\,[-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi] \\ &\qquad + \mathfrak{j}\,[-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi] + \mathfrak{k}\sin\vartheta\cos\psi \\ \bar{\mathfrak{k}} &= \mathfrak{i}\sin\varphi\sin\vartheta - \mathfrak{j}\cos\varphi\sin\vartheta + \mathfrak{k}\cos\vartheta.\end{aligned} \tag{26}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich durch Vergleich mit (23a) das Schema der 9 Richtungscosinus ablesen; man kann also auch durch Transposition die inversen, d. h. nach $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aufgelösten Formeln und nach (23b) die ebenso gebauten Formeln für die Transformation der Koordinaten sofort erhalten.

Von allen diesen Formeln sei nur eine, die später gebraucht wird, als Beispiel angeschrieben:

$$\mathfrak{k} = \bar{\mathfrak{i}}\sin\vartheta\sin\psi + \bar{\mathfrak{j}}\sin\vartheta\cos\psi + \bar{\mathfrak{k}}\cos\vartheta. \tag{26'}$$

§ 3. Vektorprodukt.

12. Einführung des Vektorprodukts. Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man den Vektor, dessen Betrag zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt des durch die beiden Vektoren bestimmten Parallelogramms ist und der auf der Ebene des Parallelogramms in der Weise senkrecht steht, daß von seiner Spitze aus die kürzeste Drehung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ im positiven Sinn erscheint; d. h. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und der Produktvektor sollen ein Rechtssystem bilden. Ist $\mathfrak{c}$ ein Einheitsvektor in der angegebenen Richtung, so ist das Vektorprodukt

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = ab\sin\vartheta\,\mathfrak{c}. \tag{27}$$

Vielfach bezeichnet man das durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmte orientierte Parallelogramm als Plangröße, den Vektor $\mathfrak{C}$ als ihre Ergänzung (Fig. 11).

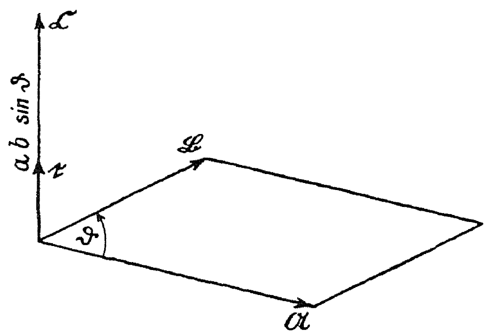


Fig. 11.

Die vektorielle Multiplikation, die ebenso wie die skalare heuristisch eingeführt ist, kann als eine Erweiterung der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks

aus seinen Seiten angesehen werden. Für das Vektorprodukt gilt [nach (27)] das assoziative Gesetz in Verbindung mit der Multiplikation mit einem Skalar:

$$(n\mathfrak{A}) \times \mathfrak{B} = n(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = n\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

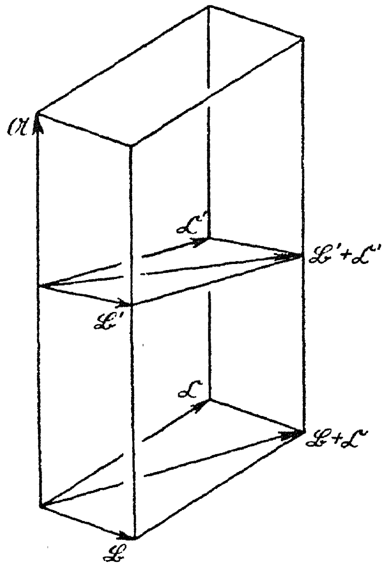


Fig. 12a.

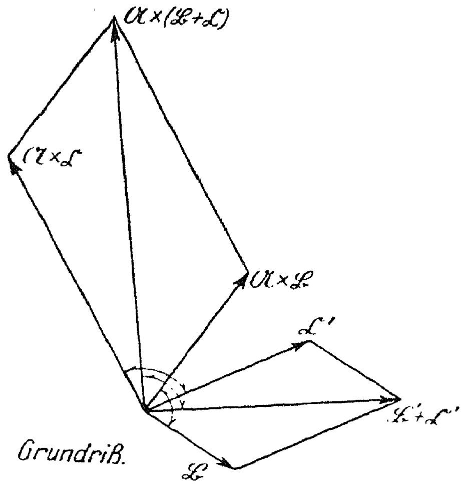


Fig. 12b.

Ferner gilt das distributive Gesetz (28)

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}.$$

Der Beweis soll geometrisch geführt werden (Fig. 12). Wir denken uns von einem Punkt O ausgehend drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die ein Parallelepiped bestimmen. Die Seitenfläche $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ soll als Grundfläche betrachtet werden; durch ihre von O ausgehende Diagonale $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ und durch $\mathfrak{A}$ ist eine Diagonalebene des Parallelepipeds bestimmt.

Wir denken uns weiter das Parallelepiped durch eine Lotebene zu $\mathfrak{A}$ geschnitten. Die Schnittfigur ist ein Parallelogramm, dessen Seiten mit $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ bezeichnet werden sollen; dann sind die Längen der Seiten $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ und der Diagonale $\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'$ den Flächeninhalten der Seitenflächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und der Diagonalebene $\mathfrak{A}, (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ des Parallelepipeds proportional.

Jetzt betrachten wir die drei Vektorprodukte $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$; die sie darstellenden Vektoren stehen auf den Seitenflächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und der Diagonalebene $\mathfrak{A}, (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ bei gleichem Drehsinn senkrecht; ihre Längen sind den Flächeninhalten proportional. Mithin bestimmen $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$ ein Parallelogramm, das der Schnittfigur $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ ähnlich ist und dessen

Diagonale $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$ ist. Damit ist das distributive Gesetz (28) bewiesen, da die Diagonale des Parallelogramms die Summe zweier Seiten ist.

Die wichtigsten Unterschiede, welche zwischen den Gesetzen der vektoriellen Multiplikation der Vektoren und der gewöhnlichen Multiplikation skalarer Zahlen bestehen, sind folgende:

An Stelle des kommutativen Gesetzes tritt das alternative Gesetz:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = -\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}, \tag{29}$$

weil sich bei Vertauschung der Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Richtung des Produktvektors umkehrt.

Die Kenntnis des Produktes und des einen Faktors (eines auf dem Produktvektor senkrechten Vektors) genügt nicht zur eindeutigen Bestimmung des anderen; es gibt keine Division als Umkehrung der vektoriellen Multiplikation. Insbesondere kann auch ein Vektorprodukt verschwinden, ohne daß ein Faktor verschwindet. Das ist der Fall, wenn $\sin\vartheta = 0$ ist, die beiden Vektoren also parallel (kollinear) sind. Die Bedingung des Parallelismus zweier Vektoren mit von Null verschiedenem Betrag ist also

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = 0.$$

Das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = 0. \tag{29'}$$

Es ist noch zu bemerken, daß dreifache Vektorprodukte existieren, daß aber für sie das assoziative Gesetz nicht gilt; d. h.

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \neq (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}.$$

Man überzeugt sich hiervon am einfachsten an einem Beispiel. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, so verschwindet die rechte Seite der Ungleichung, während die linke von Null verschieden ist, wenn nicht auch $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ kollinear ist.

13. Mechanische Anwendungen. a) Moment einer Kraft. Wenn von einem starren Körper ein Punkt O festgehalten wird und in einem Punkt P mit dem von O ausgehenden Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eine Kraft $\mathfrak{K}$ unter dem Winkel ϑ gegen $\mathfrak{r}$ angreift, so entsteht ein Drehmoment vom Betrag $rK\sin\vartheta$, dessen Achse auf der Ebene von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{K}$ senkrecht steht und dessen Drehsinn mit dem posi-

tiven Sinn des Winkels ϑ übereinstimmt. Es liegt daher nahe, das **Drehmoment durch einen Vektor** (Fig. 13)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} \tag{30}$$

zu repräsentieren, dessen Richtung in die Drehachse fällt und mit dem Drehsinn des Moments eine Rechtsschraube bildet. Die Berechtigung für diese Darstellung ergibt sich daraus daß die Zusammensetzung zweier Momente durch Addition der sie darstellenden Vektoren geschieht.

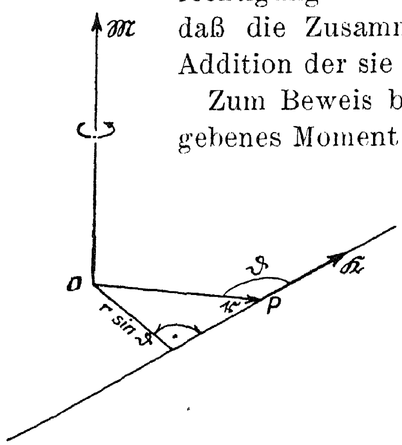


Fig. 13.

Zum Beweis bemerken wir, daß man, um ein gegebenes Moment hervorzubringen, den Angriffspunkt in der auf der Achse des Moments senkrechten Ebene durch O beliebig wählen kann; die Kraft ist damit bestimmt. Man kann also zwei Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ um verschiedene Achsen dadurch hervorrufen, daß man geeignete Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ an einem und demselben Punkt $\mathfrak{r}$ der Geraden angreifen läßt, welche auf den Achsen beider Momente senkrecht steht. Sind

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}_2$$

die Momente der beiden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times (\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)$$

das Moment ihrer Resultierenden. Nach dem distributiven Gesetz (28) ist dann

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2,$$

womit der Nachweis für den Vektorcharakter des Moments erbracht ist.

b) **Tangentialgeschwindigkeit.** Eine **Winkelgeschwindigkeit** soll versuchsweise durch einen Vektor $\mathfrak{u}$ in Richtung der Drehachse dargestellt werden, dessen Betrag u gleich dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist und der mit der Umlaufsrichtung zusammen eine Rechtsschraube bestimmt. Dann besitzt irgendein Punkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$, gemessen von einem beliebigen Punkt der Drehachse aus, eine Tangentialgeschwindig-

keit vom Betrag $ur \sin(\mathfrak{u}, \mathfrak{r})$ und die Tangentialgeschwindigkeit als Vektor wird (Fig. 14)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}. \tag{31}$$

Die Berechtigung für die Einführung des Vektors $\mathfrak{u}$ wird nachgewiesen, indem man wieder unter Verwendung des distributiven Gesetzes (28) zeigt, daß die Zusammensetzung zweier Winkelgeschwindigkeiten durch die Addition der sie darstellenden Vektoren geleistet wird.

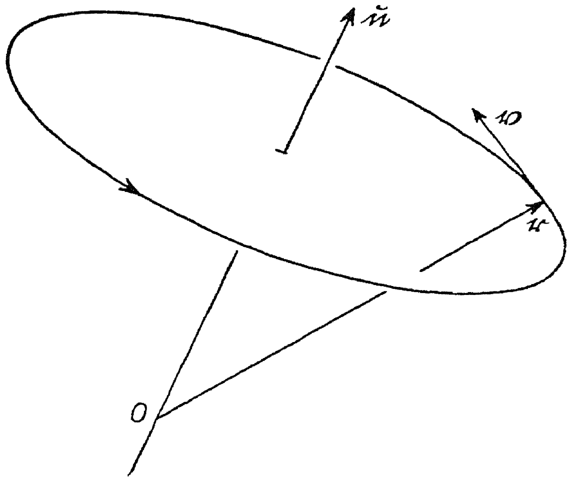


Fig. 14.

Ein Beispiel für den Vektorcharakter der Winkelgeschwindigkeit bietet die kinematische Theorie des Foucaultschen Pendels (Fig. 15), die trotz ihrer mechanischen Unzulänglichkeit sehr instruktiv ist.

Die Drehgeschwindigkeit der Erde ist durch einen Vektor $\mathfrak{u}$ gegeben, der die Richtung der Erdachse SN besitzt und dessen Betrag

$$u = \frac{2\pi}{24^h} \quad \text{ist.}$$

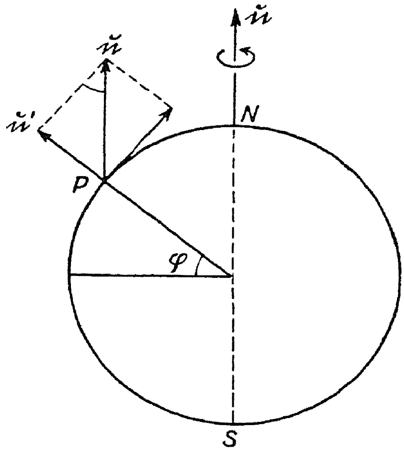


Fig. 15.

In einem Punkt P der Erdoberfläche mit der geographischen Breite φ läßt sich $\mathfrak{u}$ in zwei Komponenten in Richtung des Erdradius und der Meridiantangente zerlegen, deren Maßzahlen $u \sin \varphi$ und $u \cos \varphi$ sind. Ein in P befindlicher Beobachter bemerkt von der Drehung eines starren Körpers in der Umgebung von P, der mit der Erde fest verbunden ist, nichts. Wenn sich in der Umgebung von P ein Pendel befindet, so bewegt sich seine Schwingungsebene nicht wie ein mit der Erde fest verbundener Körper; sie ist vielmehr nicht gezwungen, die Drehung um den Erdradius mitzumachen.

Der Beobachter in P bemerkt eine (scheinbare) Drehung um den Erdradius vom Betrag

$$u' = u \sin\varphi = \frac{2\pi}{24^h} \sin\varphi$$

in entgegengesetzter Richtung. Die Umlaufszeit des Foucault-schen Pendels ist

$$T' = \frac{2\pi}{u'} = \frac{24^h}{\sin\varphi}.$$

14. Geometrische Anwendung. Plangröße. Bei der Bildung des Vektorprodukts zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wurde der Begriff der Plangröße eingeführt. Unter Plangröße soll in etwas allgemeinerer Weise ein ebenes Flächenstück verstanden werden, dessen Berandung ein bestimmter Umlaufssinn zugewiesen wird. Ihm wird als Ergänzung ein Vektor zugeordnet, dessen Betrag gleich dem Inhalt des Flächenstücks ist und dessen Richtung in diejenige Normalenrichtung des Flächenstücks fällt, die mit dem Umlaufssinn eine Rechtsschraube bestimmt. Damit ist auch für den eingangs angeführten Fall des Parallelogramms der Umlaufssinn festgelegt.

Alle Plangrößen gelten als gleich, welche in parallelen Ebenen liegen, gleichen Flächeninhalt und gleichen Umlaufssinn besitzen. Bei Umkehrung des Umlaufssinns ändert sich das Zeichen der Plangröße.

Um den Vektorcharakter der Plangrößen nachzuweisen, muß gezeigt werden, daß als Summe zweier Plangrößen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ diejenige Plangröße $\mathfrak{F}$ aufzufassen ist, deren Ergänzung die Summe der Ergänzungen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist. Hierzu formt man die Plangrößen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ so um, daß sie die Gestalt zweier Rechtecke annehmen, die in der Schnittlinie ihrer beiden Ebenen in einer Kante von der Länge 1 aneinanderstoßen (Fig. 16). Die Länge der beiden anderen Rechtecksseiten stimmt dann zahlenmäßig mit dem Inhalt der Rechtecke

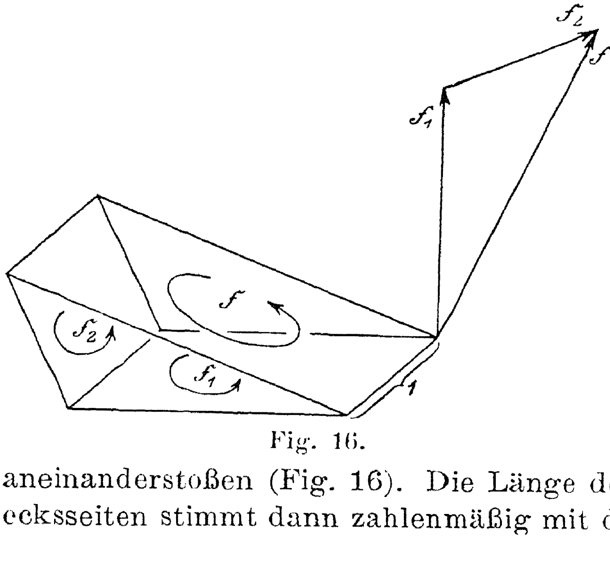


Fig. 16.

überein. Dann erkennt man sofort, daß die dritte Seite des durch die beiden Rechtecke bestimmten geraden Prismas die Summe der beiden Plangrößen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ist, denn das von den Ergänzungen der drei Prismenseiten gebildete Dreieck ist kongruent zu dem Querschnitt des Prismas und geht durch eine Drehung um 90° daraus hervor. —

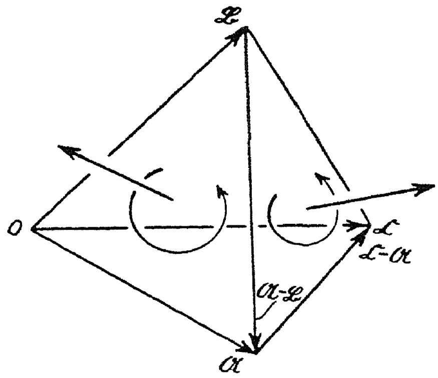


Fig. 17.

Satz über die Oberfläche eines Polyeders: Drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die von einem Punkt O ausgehen, bestimmen ein allgemeines *Tetraeder*. Die vier Seitenflächen sollen als Plangrößen aufgefaßt und so orientiert werden, daß ihre Normalen nach außen gehen. Dann ist die Summe der drei in O zusammenstoßenden Plangrößen (Fig. 17):

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}+\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}+\mathfrak{C}\times\mathfrak{A})$$

die vierte Plangröße ist

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\times(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})=\frac{1}{2}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{C}-\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}).$$

Also ist die Summe aller vier Plangrößen, oder *die orientierte Oberfläche des Tetraeders Null.*

Ebenso *ist die orientierte Oberfläche eines jeden geschlossenen Polyeders Null.* Um den Satz für ein konvexes Polyeder zu beweisen, zerlegt man es von einem inneren Punkt aus in dreiseitige Pyramiden. Die Summe der Oberflächen aller dieser Tetraeder ist Null. Aus der Summe fallen alle nicht der Oberfläche des Polyeders angehörenden Seitenflächen heraus, weil jede von ihnen zweimal und zwar in beiden Orientierungen vorkommt.

Für ein nicht konvexes Polyeder bedarf der Beweis nur einer geringfügigen Änderung.

Dieser Satz läßt eine einfache *mechanische Deutung* zu. Ein Polyeder soll in eine Flüssigkeit getaucht und an seiner Oberfläche überall dem gleichen spezifischen Druck ausgesetzt sein. Dann wird der Druck auf jede Seitenfläche durch die Ergänzung der Plangröße gemessen: der resultierende Druck auf die gesamte Oberfläche ist also Null.

Zerlegung einer Plangröße in Komponenten: Wenn man in einem beliebigen Tetraeder die Seitenflächen derart orientiert, daß drei Normalen nach innen gehen, die vierte nach außen, so ist die vierte Plangröße die Summe der drei anderen. Damit ist eine Plangröße in Komponenten nach drei vorgegebenen Ebenen zerlegt.

Betrachtet man ein Tetraeder mit einer rechtwinkligen Ecke und nimmt die aufeinander senkrechten Kanten als Achsen eines Koordinatensystems, so sind die in die Koordinatenebenen fallenden Seitenflächen die Komponenten der vierten Seitenfläche.

Jede Plangröße wird also in Komponenten nach drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen zerlegt, indem man sie in diese Ebenen projiziert, während gleichzeitig ihre Ergänzung durch Projektion auf die drei Koordinatenachsen in die entsprechenden Komponenten zerlegt wird.

15. Volumen eines Zylinders. Ist die Grundfläche eines (schiefen) Zylinders (oder Prismas) durch die Plangröße $\mathfrak{F}$, eine Mantellinie durch den Vektor $\mathfrak{S}$ gegeben, so gibt das skalare Produkt

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = V \qquad (32)$$

das Volumen des Zylinders (oder Prismas) (Fig. 18).

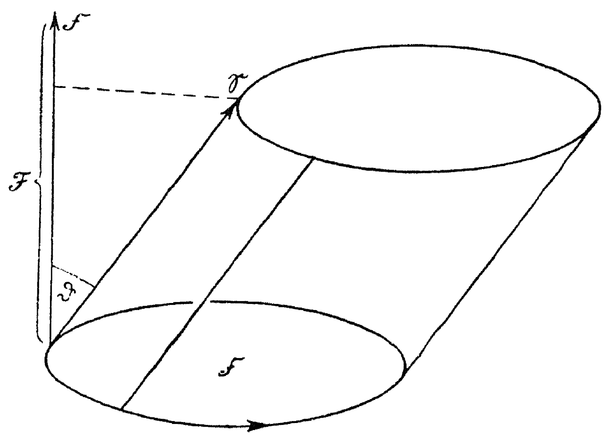


Fig. 18.

Um das zu beweisen, tragen wir die Ergänzung der Plangröße $\mathfrak{F}$ als Vektor auf; dann ist

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = Fs \cos \vartheta,$$

wenn F den (positiven) Flächeninhalt der Grundfläche, s die Länge einer Mantellinie, ϑ den Winkel zwischen der Ergänzung $\mathfrak{F}$ und einer Mantellinie $\mathfrak{S}$ bedeuten. Sei ferner h die Höhe des Zylinders, so ist

$$s \cos \vartheta = \pm h,$$

also

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = \pm Fh.$$

Die rechte Seite ist der aus den Elementen bekannte Ausdruck für das Volumen eines Zylinders, und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Ergänzung $\mathfrak{F}$ mit der Mantel-

linie einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt, je nachdem also der Umlaufssinn der Plangröße $\mathfrak{F}$ mit dem Richtungssinn des Vektors $\mathfrak{S}$ eine Rechts- oder Linksschraube bestimmt.

16. Ein Dreibein als Basis. Sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren eines Dreibeins in Richtung der x, y, z-Achse des als Rechtssystem vorausgesetzten rechtwinkligen Koordinatensystems, so haben die Vektorprodukte je zweier dieser Einheitsvektoren folgende Werte [nach (29') (27)]:

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}=\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}=\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}=0; \qquad (33a)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{i}\times\mathfrak{j}&=\mathfrak{k}; & \mathfrak{j}\times\mathfrak{i}&=-\mathfrak{k};\\ \mathfrak{j}\times\mathfrak{k}&=\mathfrak{i}; & \mathfrak{k}\times\mathfrak{j}&=-\mathfrak{i}; \qquad (33b)\\ \mathfrak{k}\times\mathfrak{i}&=\mathfrak{j}; & \mathfrak{i}\times\mathfrak{k}&=-\mathfrak{j}.\end{aligned}$$

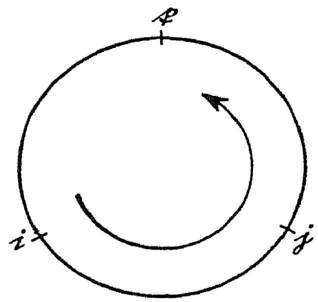


Fig. 19.

Man erhält die Formeln (33b) nach einer einfachen Gedächtnisregel: Bezeichnet man 3 Punkte eines Kreises, die in positiver Umlaufsrichtung aufeinanderfolgen, mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so ist das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren gleich dem dritten oder entgegengesetzt gleich dem dritten, je nachdem die beiden in positiver oder negativer Richtung aufeinanderfolgen (Fig. 19).

Das Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{i}a_1+\mathfrak{j}a_2+\mathfrak{k}a_3,$$
$$\mathfrak{B}=\mathfrak{i}b_1+\mathfrak{j}b_2+\mathfrak{k}b_3$$

ist

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=\mathfrak{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathfrak{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathfrak{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

oder

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (34)$$

Ersetzt man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch zwei Einheitsvektoren

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{i}\cos\alpha_1+\mathfrak{j}\cos\alpha_2+\mathfrak{k}\cos\alpha_3,$$
$$\mathfrak{b}=\mathfrak{i}\cos\beta_1+\mathfrak{j}\cos\beta_2+\mathfrak{k}\cos\beta_3,$$

so wird nach (27)

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\sin\vartheta\,\mathfrak{c}=\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\end{vmatrix}, \qquad (34')$$

folglich

$$\sin^2\vartheta=\begin{vmatrix}\cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_2 & \cos\beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2\end{vmatrix}$$

Zerlegung einer Plangröße in Komponenten: Wenn man in einem beliebigen Tetraeder die Seitenflächen derart orientiert, daß drei Normalen nach innen gehen, die vierte nach außen, so ist die vierte Plangröße die Summe der drei anderen. Damit ist eine Plangröße in Komponenten nach drei vorgegebenen Ebenen zerlegt.

Betrachtet man ein Tetraeder mit einer rechtwinkligen Ecke und nimmt die aufeinander senkrechten Kanten als Achsen eines Koordinatensystems, so sind die in die Koordinatenebenen fallenden Seitenflächen die Komponenten der vierten Seitenfläche.

Jede Plangröße wird also in Komponenten nach drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen zerlegt, indem man sie in diese Ebenen projiziert, während gleichzeitig ihre Ergänzung durch Projektion auf die drei Koordinatenachsen in die entsprechenden Komponenten zerlegt wird.

15. Volumen eines Zylinders. Ist die Grundfläche eines (schiefen) Zylinders (oder Prismas) durch die Plangröße $\mathfrak{F}$, eine Mantellinie durch den Vektor $\mathfrak{S}$ gegeben, so gibt das skalare Produkt

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = V \tag{32}$$

das Volumen des Zylinders (oder Prismas) (Fig. 18).

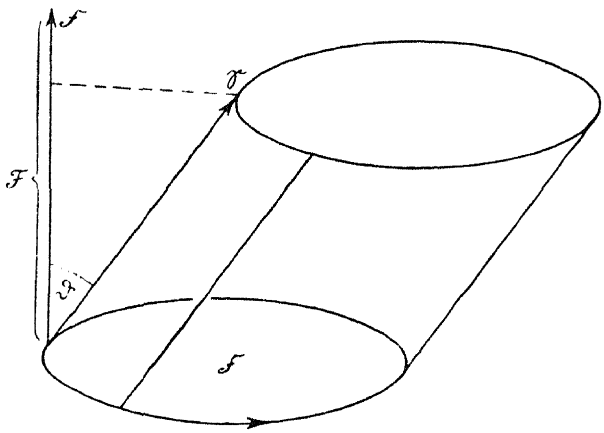


Fig. 18.

Um das zu beweisen, tragen wir die Ergänzung der Plangröße $\mathfrak{F}$ als Vektor auf; dann ist

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = F s \cos\vartheta,$$

wenn F den (positiven) Flächeninhalt der Grundfläche, s die Länge einer Mantellinie, ϑ den Winkel zwischen der Ergänzung $\mathfrak{F}$ und einer Mantellinie $\mathfrak{S}$ bedeuten. Sei ferner h die Höhe des Zylinders, so ist

$$s \cos\vartheta = \pm h,$$

also

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{S} = \pm F h.$$

Die rechte Seite ist der aus den Elementen bekannte Ausdruck für das Volumen eines Zylinders, und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Ergänzung $\mathfrak{F}$ mit der Mantel-

linie einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt, je nachdem also der Umlaufssinn der Plangröße $\mathfrak{F}$ mit dem Richtungssinn des Vektors $\mathfrak{S}$ eine Rechts- oder Linksschraube bestimmt.

16. Ein Dreibein als Basis. Sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren eines Dreibeins in Richtung der x, y, z-Achse des als Rechtssystem vorausgesetzten rechtwinkligen Koordinatensystems, so haben die Vektorprodukte je zweier dieser Einheitsvektoren folgende Werte [nach (29′) (27)]:

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}=\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}=\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}=0; \qquad (33\,\mathrm{a})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\times\mathfrak{j}&=\mathfrak{k}; & \mathfrak{j}\times\mathfrak{i}&=-\mathfrak{k};\\ \mathfrak{j}\times\mathfrak{k}&=\mathfrak{i}; & \mathfrak{k}\times\mathfrak{j}&=-\mathfrak{i}; \qquad (33\,\mathrm{b})\\ \mathfrak{k}\times\mathfrak{i}&=\mathfrak{j}; & \mathfrak{i}\times\mathfrak{k}&=-\mathfrak{j}. \end{aligned}$$

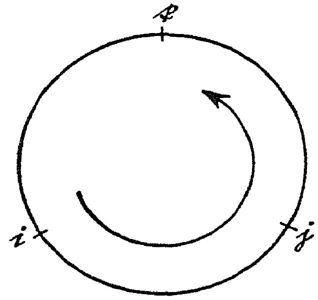


Fig. 19.

Man erhält die Formeln (33b) nach einer einfachen Gedächtnisregel: Bezeichnet man 3 Punkte eines Kreises, die in positiver Umlaufsrichtung aufeinanderfolgen, mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so ist das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren gleich dem dritten oder entgegengesetzt gleich dem dritten, je nachdem die beiden in positiver oder negativer Richtung aufeinanderfolgen (Fig. 19).

Das Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{i}a_1+\mathfrak{j}a_2+\mathfrak{k}a_3,$$
$$\mathfrak{B}=\mathfrak{i}b_1+\mathfrak{j}b_2+\mathfrak{k}b_3$$

ist

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=\mathfrak{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathfrak{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathfrak{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

oder

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}=\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad (34)$$

Ersetzt man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch zwei Einheitsvektoren

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{i}\cos\alpha_1+\mathfrak{j}\cos\alpha_2+\mathfrak{k}\cos\alpha_3,$$
$$\mathfrak{b}=\mathfrak{i}\cos\beta_1+\mathfrak{j}\cos\beta_2+\mathfrak{k}\cos\beta_3,$$

so wird nach (27)

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\sin\vartheta\,\mathfrak{c}=\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\end{vmatrix}, \qquad (34')$$

folglich

$$\sin^2\vartheta=\begin{vmatrix}\cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_2 & \cos\beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2\end{vmatrix}^2.$$

Für die Quadratsumme der Determinanten einer Matrix schreibt man häufig abkürzend das Quadrat der Matrix selbst; also

$$\sin^2\vartheta = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \end{matrix} \right\|^2 \tag{34''}$$

Zwischen dieser Formel und Gleichung (19)

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3$$

besteht ein einfacher Zusammenhang, der durch die Legendresche Identität hergestellt wird. Nach dieser berechnet sich das Quadrat einer Matrix von 6 Elementen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ folgendermaßen:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\|^2 = \left| \begin{matrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{matrix} \right|.$$

Zufolge dieser Identität geht (34''), wenn man a_i durch $\cos\alpha_i$, b_i durch $\cos\beta_i$ ersetzt, unter Verwendung von (19) und (22) über in

$$\sin^2\vartheta = \left| \begin{matrix} 1 & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 1 \end{matrix} \right|.$$

17. Einführung eines neuen Dreibeins als Basis. Von Interesse ist das Verhalten des Vektorprodukts bei Einführung eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems. Unter leichter Änderung der Bezeichnung, indem man $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ ersetzt, kann man

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} a_1 + \mathfrak{j} a_2 + \mathfrak{k} a_3 = \sum_\mu \mathfrak{i}_\mu a_\mu$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{i} b_1 + \mathfrak{j} b_2 + \mathfrak{k} b_3 = \sum_\nu \mathfrak{i}_\nu b_\nu$$

setzen. Dann wird

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \sum_\mu \mathfrak{i}_\mu a_\mu \times \sum_\nu \mathfrak{i}_\nu b_\nu = \left| \begin{matrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right|; \tag{35}$$

dabei ist an Stelle von (33)

$$\mathfrak{i}_\mu \times \mathfrak{i}_\mu = 0; \quad \mathfrak{i}_\mu \times \mathfrak{i}_{\mu+1} = \mathfrak{i}_{\mu+2} \tag{36}$$

zu setzen, wobei Indizes, die größer als 3 sind, nach dem Modul 3 zu reduzieren sind.

Nun sollen auch die Formeln (23a, b) für die orthogonale Transformation zusammenfassend geschrieben werden. Setzt man (für $\mu = 1, 2, 3$)

$$\cos\alpha_\mu = c_{\mu 1}, \quad \cos\beta_\mu = c_{\mu 2}, \quad \cos\gamma_\mu = c_{\mu 3},$$

so werden diese Formeln

$$\mathfrak{i}_\mu = \sum_\varrho c_{\mu\varrho}\bar{\mathfrak{i}}_\varrho; \qquad \bar{\mathfrak{i}}_\varrho = \sum_\mu c_{\mu\varrho}\mathfrak{i}_\mu; \qquad (37)$$
$$a_\mu = \sum_\varrho c_{\mu\varrho}\bar{a}_\varrho; \qquad \bar{a}_\varrho = \sum_\mu c_{\mu\varrho} a_\mu.$$

Führt man nun die Transformation in (35) sowohl in beiden Faktoren des Vektorprodukts als in dem Produktvektor selbst aus, so folgt:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \sum_\mu \mathfrak{i}_\mu a_\mu \times \sum_\nu \mathfrak{i}_\nu b_\nu = \begin{vmatrix} \Sigma c_{1\varrho}\bar{\mathfrak{i}}_\varrho & \Sigma c_{2\varrho}\bar{\mathfrak{i}}_\varrho & \Sigma c_{3\varrho}\bar{\mathfrak{i}}_\varrho \\ \Sigma c_{1\varrho}\bar{a}_\varrho & \Sigma c_{2\varrho}\bar{a}_\varrho & \Sigma c_{3\varrho}\bar{a}_\varrho \\ \Sigma c_{1\varrho}\bar{b}_\varrho & \Sigma c_{2\varrho}\bar{b}_\varrho & \Sigma c_{3\varrho}\bar{b}_\varrho \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite läßt sich nach dem Multiplikationssatz als Produkt zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{i}}_1 & \bar{\mathfrak{i}}_2 & \bar{\mathfrak{i}}_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{vmatrix}$$

schreiben, deren erste

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

die Transformationsdeterminante der orthogonalen Transformation (37) ist, also den Wert ± 1 hat, je nachdem die Koordinatentransformation eine reine Drehung oder mit einer Spiegelung verbunden ist. Mithin wird (35)

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \sum_\mu \mathfrak{i}_\mu a_\mu \times \sum_\nu \mathfrak{i}_\nu b_\nu = \pm \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{i}}_1 & \bar{\mathfrak{i}}_2 & \bar{\mathfrak{i}}_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{vmatrix}. \qquad (38)$$

Nur gegenüber reinen Drehungen ist also die rechte Seite von (35) invariant. Bei Spiegelungen ändert sie ihr Vorzeichen; dann ist das Multiplikationsgesetz (36) durch

$$\bar{\mathfrak{i}}_\mu \times \bar{\mathfrak{i}}_\mu = 0; \quad \bar{\mathfrak{i}}_\mu \times \bar{\mathfrak{i}}_{\mu+1} = -\bar{\mathfrak{i}}_{\mu+2} \qquad (39)$$

zu ersetzen, das für Linkssysteme gilt.

§ 4. Mehrfache Produkte.

18. Gemischtes Produkt. Das Volumen eines Parallelepipeds, das durch drei von einer Ecke *O* ausgehende Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmt ist, läßt sich in folgender Weise berechnen. Das

durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bestimmte Parallelogramm soll als Grundfläche betrachtet werden; dann gibt

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$$

die Grundfläche als Plangröße, also nach Inhalt und Stellung im Raum (Fig. 20).

Dann ist

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = V \tag{40}$$

nach (32) das Volumen des Parallelepipeds; das Volumen ergibt sich positiv oder negativ, je nachdem die Ergänzung der Grundfläche mit der dritten Kante $\mathfrak{C}$ einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt, je nachdem also die 3 Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem oder Linkssystem bilden.

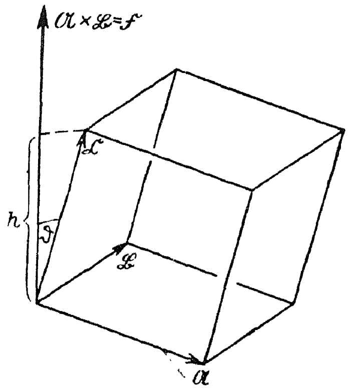


Fig. 20.

Der Ausdruck $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$ wird als ein gemischtes Produkt der 3 Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet; aus seiner geometrischen Bedeutung folgt, daß sämtliche gemischte Produkte, die man aus 3 Vektoren bilden kann, bis auf das Vorzeichen einander gleich sein müssen.

Insbesondere ist

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \cdot \mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{B}, \tag{41}$$

da bei zyklischer Vertauschung dreier Vektoren der Charakter des Rechts- bzw. Linkssystems erhalten bleibt.

Vertauscht man ferner in dem mittleren Ausdruck die Faktoren des skalaren Produkts, so erhält man

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \tag{41'}$$

und erkennt, daß bei gleicher Reihenfolge der Faktoren die skalare und vektorielle Multiplikation vertauschbar sind.

Der Inhalt dieser beiden Aussagen wird in der Regel als Vertauschungssatz zusammengefaßt. —

Führt man für das gemischte Produkt eine besondere Bezeichnung ein und setzt

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

so gilt für nicht zyklische Vertauschungen

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]. \tag{41''}$$

Das gemischte Produkt dreier Vektoren mit von Null verschiedenen Beträgen verschwindet dann und nur dann, wenn die 3 Vektoren komplanar sind.

Drei nicht komplanare Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmen ein Tetraeder vom Volumen

$$V_0 = \frac{1}{6}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Bezeichnet man die Beträge von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit a, b, c, ihre Einheitsvektoren mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so wird

$$V_0 = \frac{1}{6} abc[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]. \tag{42}$$

$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ ist der von Staudtsche Eckensinus; diese Bezeichnung verdankt ihre Berechtigung der Analogie der Formel (42) mit der für den Inhalt eines ebenen Dreiecks $\left(F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma\right)$.

19. Einführung von Koordinaten. Setzt man, bezogen auf ein Rechtssystem

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{i}a_1 + \mathfrak{j}a_2 + \mathfrak{k}a_3,\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{i}b_1 + \mathfrak{j}b_2 + \mathfrak{k}b_3,\\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{i}c_1 + \mathfrak{j}c_2 + \mathfrak{k}c_3,\end{aligned}$$

so wird

$$\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}) = (\mathfrak{i}a_1 + \mathfrak{j}a_2 + \mathfrak{k}a_3)\cdot\begin{vmatrix}\mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

mithin

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{43}$$

Insbesondere wird das gemischte Produkt der Einheitsvektoren eines Rechtssystems selbst

$$[\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = 1. \tag{44}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante (43) folgt wieder der Vertauschungssatz und die Bedingung für das Verschwinden eines gemischten Produkts. —

Unter Verwendung des gemischten Produkts läßt sich auch die Identität (5)

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{v}_1 & x_1 & y_1 & z_1\\ \mathfrak{v}_2 & x_2 & y_2 & z_2\\ \mathfrak{v}_3 & x_3 & y_3 & z_3\\ \mathfrak{v}_4 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix} = 0$$

in eine neue, vom Koordinatensystem unabhängige Form bringen. Die Entwicklung nach Elementen der ersten Spalte ergibt:

$$\mathfrak{v}_1[\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_4] - \mathfrak{v}_2[\mathfrak{v}_3\mathfrak{v}_4\mathfrak{v}_1] + \mathfrak{v}_3[\mathfrak{v}_4\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2] - \mathfrak{v}_4[\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3] = 0. \quad (45)$$

20. Gramsche Determinante. Das gemischte Produkt dreier Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist in (43) mittels der rechtwinkligen Koordinaten dieser 3 Vektoren berechnet worden. Man kann sich vom Koordinatensystem frei machen, wenn man beide Seiten von (43) quadriert, die rechte Seite unter Verwendung des Laplaceschen Multiplikationssatzes (in den folgenden Summen sind die Indizes weggelassen).

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]^2 = \begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma ab & \Sigma ac \\ \Sigma ba & \Sigma b^2 & \Sigma bc \\ \Sigma ca & \Sigma cb & \Sigma c^2 \end{vmatrix}.$$

Die Elemente der Determinante sind die skalaren Produkte der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; also ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C} \\ \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} \\ \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C} \end{vmatrix}. \quad (46)$$

Die hier auftretende Determinante heißt die Gramsche Determinante der 3 Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Sie bleibt bei Vertauschung zweier Vektoren ungeändert; dagegen besitzt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ als Quadratwurzel der Gramschen Determinante doppeltes Zeichen.

Eine ähnliche, etwas allgemeinere Determinante kann man für das Produkt zweier gemischter Vektorprodukte erhalten. Ist nach (43)

$$[\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'] = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

das gemischte Produkt dreier Vektoren $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ so ist nach dem Laplaceschen Multiplikationssatz

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}][\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma aa' & \Sigma ab' & \Sigma ac' \\ \Sigma ba' & \Sigma bb' & \Sigma bc' \\ \Sigma ca' & \Sigma cb' & \Sigma cc' \end{vmatrix}$$

oder

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}][\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'] = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}' & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}' & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}' \\ \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}' & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B}' & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}' \\ \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}' & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}' & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C}' \end{vmatrix}. \quad (46')$$

Die G r a m sche Determinante tritt z. B. in der Aufgabe auf, e i n e n V e k t o r $\mathfrak{r}$ a u s 3 s k a l a r e n P r o d u k t e n z u b e r e c h n e n. Es sei

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A} = u, \quad \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{B} = v, \quad \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{C} = w, \tag{47}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gegebene nicht komplare Vektoren, u, v, w gegebene Skalare sind. Dann kann man $\mathfrak{r}$ linear durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ darstellen:

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}.$$

Um die unbekannten Parameter x, y, z zu bestimmen, multipliziert man diese Gleichung skalar mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und erhält

$$\begin{aligned} u &= x\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} + y\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} + z\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C};\\ v &= x\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B} + z\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C};\\ w &= x\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A} + y\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C}. \end{aligned}$$

Nun lassen sich x, y, z eliminieren:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{r} & \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ u & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C} \\ v & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} \\ w & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C} \end{vmatrix} = 0. \tag{48}$$

Daraus folgt nach (46)

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & 0 \\ \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C} & u \\ \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} & v \\ \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B} & \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{C} & w \end{vmatrix}, \tag{48'}$$

womit die Aufgabe, die algebraisch auf die Auflösung eines Systems von 3 linearen Gleichungen hinauskommt, in einer vom Grundsystem unabhängigen Form gelöst ist. Die Einschränkung, daß die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nicht komplanar sind, also ihr gemischtes Produkt von Null verschieden ist, erweist sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösung.

21. Dreifaches Vektorprodukt. Die vektorielle Multiplikation erlaubt die Bildung von Produkten aus mehr als zwei Faktoren. Der Vektor $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})$ steht senkrecht auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$, liegt also in der Ebene $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und läßt sich in die Form

$$\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}) = \lambda\mathfrak{B} + \mu\mathfrak{C} \tag{49}$$

bringen (Fig. 21). λ, μ sind zwei skalare Faktoren, deren Bestimmung unerwartet mühsam ist.

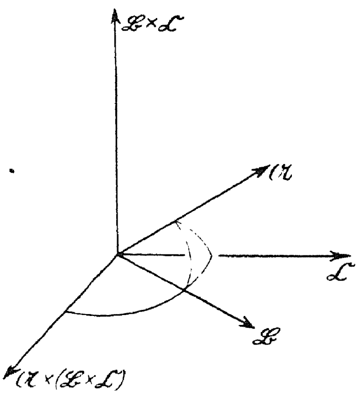


Fig. 21.

In dem speziellen Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ lassen sich λ und μ durch geometrische Anschauung bestimmen. Der Vektor $\mathfrak{B} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})$ liegt in der Ebene $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, steht senkrecht auf $\mathfrak{B}$ und hat den Absolutbetrag $B^2 C \sin \vartheta$ (Fig. 22a). Die Längen seiner Komponenten in Richtung $\mathfrak{B}$ und $-\mathfrak{C}$ sind $B^2 C \cos \vartheta$ und $B^2 C$ (Fig. 22b), also ist

$$\mathfrak{B} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B})\,\mathfrak{C}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\mathfrak{C} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{C}.$$

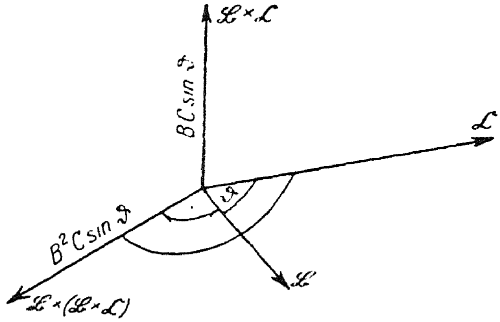


Fig. 22a.

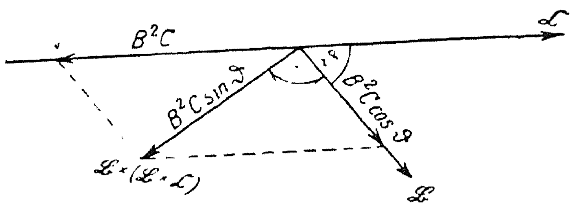


Fig. 22b.

Mit Hilfe dieser beiden Formeln lassen sich λ und μ auch im allgemeinen Fall bestimmen. Hierzu multipliziert man die Gleichung (49) skalar mit $\mathfrak{B}$ und mit $\mathfrak{C}$. Im ersten Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) + \mu(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) &= \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \cdot \mathfrak{B} \\ &= \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \times \mathfrak{B} \quad [\text{Vertauschungssatz (41')}] \\ &= \mathfrak{A} \cdot \{(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} - (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}\},\end{aligned}$$

also

$$\lambda(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) + \mu(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C});$$

ebenso wird im zweiten Fall

$$\lambda(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) + \mu(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}).$$

Diese beiden Gleichungen können nur bestehen, wenn

$$\lambda = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}, \quad \mu = -\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$$

ist. Damit ergibt sich der Entwicklungssatz:

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})\mathfrak{C}. \tag{50}$$

Zwischen den verschiedenen dreifachen Vektorprodukten, die sich aus drei Vektoren bei verschiedener Anordnung der Faktoren bilden lassen, besteht die Beziehung

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) + \mathfrak{B} \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) + \mathfrak{C} \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = 0, \tag{51}$$

die sich mit Hilfe des Entwicklungssatzes sofort bestätigen läßt.

Diese Gleichung hat folgende geometrische Bedeutung. Jeder der drei Summanden der linken Seite ist ein Vektor, der in einer Seitenfläche des Dreikants $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegt und auf der dritten Kante senkrecht steht. Diese drei Vektoren, die für das folgende mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ bezeichnet werden sollen, liegen in einer Ebene E. Denkt man sich jetzt um den Scheitel des Dreikants als Mittelpunkt eine Kugel gelegt, so liegen die drei Höhen des durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmten sphärischen Dreiecks in den drei größten Kreisen, deren Pole durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ bestimmt sind. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt, nämlich dem Pol der Ebene E.

Der Entwicklungssatz läßt sich auch, und zwar kürzer als durch die hier gegebene geometrische Ableitung, dadurch beweisen, daß man den Vektor $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})$ auf ein Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezieht und seine Maßzahlen berechnet.

22. Vierfache Produkte. Vierfache Produkte lassen sich mit Hilfe des Vertauschungs- und des Entwicklungssatzes berechnen. So ist

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{A} \cdot \{\mathfrak{B} \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})\} = \mathfrak{A} \cdot \{(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D})\mathfrak{C} - (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})\mathfrak{D}\}$$

oder (52)

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D})(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} & \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} & \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} \end{vmatrix}$$

Ein vierfaches Vektorprodukt $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})$ kann als dreifaches Vektorprodukt aus den Faktoren $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ aufgefaßt und nach dem Entwicklungssatz berechnet werden:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) &= [(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D}]\,\mathfrak{C} - [(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}]\,\mathfrak{D} \\ &= [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]\,\mathfrak{C} - [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\,\mathfrak{D}. \end{aligned} \tag{53a}$$

Eine zweite Möglichkeit der Berechnung ergibt sich, wenn man das vierfache Produkt als dreifaches Vektorprodukt aus den Faktoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ auffaßt. Man erhält dann

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\,\mathfrak{B} - [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\,\mathfrak{A}. \tag{53b}$$

Die Gleichsetzung der rechten Seiten ergibt die Identität (45) zwischen vier Vektoren.

23. Anwendungen auf die Geometrie der Geraden und Ebene. Die analytische Geometrie der Geraden und Ebene läßt sich mit den bisher behandelten Methoden der Vektoralgebra vollständig durchführen, wenn man einen jeden Punkt statt durch seine kartesischen Koordinaten durch seinen Ortsvektor festlegt. Es soll indessen nur auf weniges hingewiesen werden.

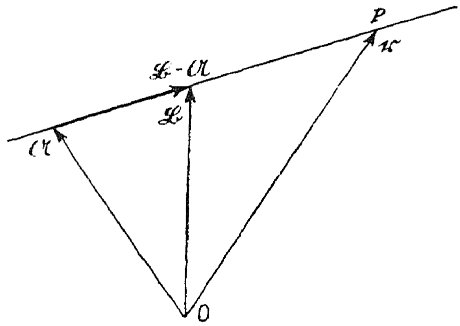


Fig. 23.

a) Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ortsvektoren zweier Punkte A und B im Raum, so ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines Punktes P der Geraden AB durch die Bedingung (Fig. 23)

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{A} = \lambda(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$$

bestimmt, wobei λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Folglich ist

$$\mathfrak{r} = (1 - \lambda)\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B}$$

die Parameterdarstellung der Geraden AB. Sie kann in die Form

$$\mathfrak{r} = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B}$$

mit der Nebenbedingung

$$a + b = 1$$

gesetzt werden, oder auch in die Form

$$\mathfrak{r} = \frac{p\mathfrak{A} + q\mathfrak{B}}{p + q},$$

wobei $\frac{q}{p}$ das Verhältnis ist, in dem der Punkt P die Strecke AB teilt. Dieser Ausdruck kann auch mechanisch gedeutet werden; P ist der Schwerpunkt zweier Massen p und q in A und B. —

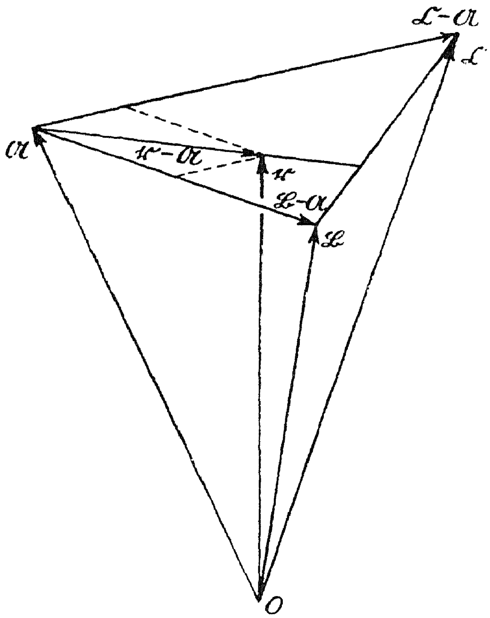


Fig. 24.

b) Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Ortsvektoren dreier Punkte A, B, C, so ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines Punktes der Ebene ABC durch die Bedingung (Fig. 24)

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{A} = \lambda(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \mu(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$$

bestimmt, wenn λ und μ zwei Parameter bedeuten. Die Parameterdarstellung der Ebene durch drei Punkte A, B, C wird dann

$$\mathfrak{r} = (1 - \lambda - \mu)\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B} + \mu\mathfrak{C}$$

oder auch

$$\mathfrak{r} = a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C}$$

mit der Nebenbedingung

$$a + b + c = 1.$$

Die Bedingung, daß die Endpunkte von vier Ortsvektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, ist

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + d\mathfrak{D} = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$a + b + c + d = 0.$$

Ohne Verwendung von Parametern läßt sich die Gleichung der Ebene durch drei Punkte A, B, C in die Form

$$[\mathfrak{r} - \mathfrak{A}, \mathfrak{B} - \mathfrak{A}, \mathfrak{C} - \mathfrak{A}] = 0$$

oder

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{C}\mathfrak{A}] + [\mathfrak{r}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

bringen.

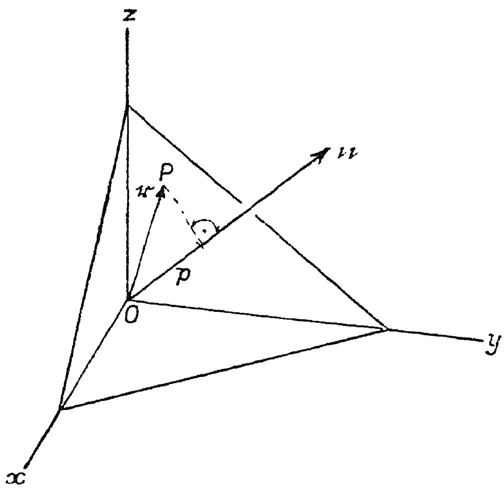


Fig. 25.

c) Um die Hessesche Normalform der Gleichung einer Ebene aufzustellen, bezeichnet man mit $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Normalen der Ebene nach der Seite hin, auf der der Anfangspunkt nicht liegt, mit p den Abstand der Ebene vom Anfangspunkt. Ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor eines Punktes P der Ebene, so ist (Fig. 25) die Projektion von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{n}$ gerade p, also

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} - p = 0$$

die Gleichung der Ebene. Ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor eines der Ebene nicht angehörenden Punktes Q, so gibt

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} - p = d$$

den Abstand des Punktes Q von der Ebene.

d) Plückersche Gleichung einer Geraden[1]): Für alle Punkte einer Geraden, die die Richtung eines Vektors $\mathfrak{A}$ hat, ist das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{A}$ dasselbe (Fig. 26); folglich ist

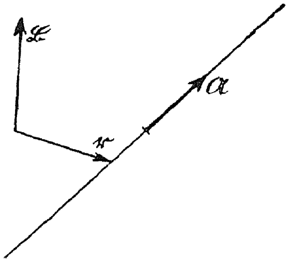


Fig. 26.

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

die Gleichung einer Geraden, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei durch die Bedingung

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = 0$$

verknüpfte, im übrigen beliebige Vektoren sind. Die Maßzahlen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind die Plückerschen Linienkoordinaten der Geraden; sie sind homogen und enthalten einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor. Zu einer Festsetzung dieses Faktors kommt man, wenn man etwa $\mathfrak{A}$ als Einheitsvektor voraussetzt.

e) Die Hessesche Normalform für die Gleichung einer Ebene läßt geometrisch erkennen, daß die Aufgabe, einen Faktor $\mathfrak{r}$ eines skalaren Produktes zu bestimmen, dessen Wert gegeben ist, ∞^2 Lösungen besitzt. Ebenso erkennt man aus der Plückerschen Gleichung einer Geraden geometrisch, daß die Bestimmung eines Faktors eines Vektorprodukts auf ∞^1 Weisen möglich ist. Der algebraischen Aufgabe, die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \quad (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = 0)$$
$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{N} = P$$

nach $\mathfrak{r}$ aufzulösen, läßt sich der geometrische Sinn unterlegen, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen.

Die Auflösung geschieht am einfachsten dadurch, daß man die erste Gleichung vektoriell mit $\mathfrak{N}$ multipliziert:

$$\mathfrak{N} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{N} \times \mathfrak{B}.$$

Nach dem Entwicklungssatz ergibt sich

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N} - \mathfrak{A} P = \mathfrak{N} \times \mathfrak{B}$$

oder

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{A} P + \mathfrak{N} \times \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N}}.$$

f) Eine ähnliche Aufgabe, nämlich die Bestimmung eines Vektors $\mathfrak{r}$ aus 3 skalaren Produkten

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A} = u, \quad \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{B} = v, \quad \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{C} = w$$

---

1) Vergl. L. Schrutka, Elemente der höheren Mathematik. 1921. S. 496. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. 1921. S. 191.

ist bereits Ziff. 20 im Anschluß an die Gramsche Determinante gelöst worden. Ihr geometrischer Sinn ist die Bestimmung des Schnittpunktes dreier Ebenen. Die für die eindeutige Lösung als notwendig und hinreichend erkannte Bedingung $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] \neq 0$ sagt aus, daß die Normalenrichtungen der 3 Ebenen nicht komplanar, die Ebenen selbst also nicht einer Geraden parallel sein dürfen.

24. Reziproke Grundsysteme. Zwei Grundsysteme von je 3 Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ heißen reziprok, wenn die Kanten des von den einen gebildeten Dreikants auf den Seiten des von den anderen gebildeten Dreikants senkrecht stehen — eine bekanntlich gegenseitige Eigenschaft — und wenn außerdem zwischen den Richtungssinnen und zwischen den Beträgen der beiden Tripel von Vektoren geeignete Beziehungen festgesetzt sind.

Die Bedingungen für das Senkrechtstehen je eines Vektors der zweiten Basis $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ auf je zwei Vektoren der ersten Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{b} = 0; & \mathfrak{b}^*\cdot\mathfrak{a} = 0; & \mathfrak{c}^*\cdot\mathfrak{a} = 0; \\ \mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{c} = 0; & \mathfrak{b}^*\cdot\mathfrak{c} = 0; & \mathfrak{c}^*\cdot\mathfrak{b} = 0; \end{array} \tag{54a}$$

sie lassen durch Umordnung erkennen, daß, wie oben bemerkt, auch jeder Vektor der ersten Basis auf je zweien der zweiten senkrecht steht:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^* = 0; & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}^* = 0; & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}^* = 0; \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}^* = 0; & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}^* = 0; & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}^* = 0. \end{array} \tag{54b}$$

Die Vektoren jedes der beiden Systeme sind also den Vektorprodukten je zweier Vektoren des andern Systems proportional. Zur Bestimmung der skalaren Proportionalitätsfaktoren, die, wenn das eine System gegeben ist, Richtungssinn und Betrag der Vektoren des anderen Systems charakterisieren, werden folgende Beziehungen festgesetzt:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}^* = 1; \quad \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}^* = 1; \quad \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}^* = 1. \tag{55}$$

Nun lassen sich die Grundvektoren der zweiten Basis nach (54a) und (55) durch die der ersten in folgender Weise ausdrücken:

$$\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}; \quad \mathfrak{b}^* = \frac{\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}; \quad \mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}; \tag{56a}$$

entsprechend die Grundvektoren der ersten Basis durch die der zweiten:

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b}^*\times\mathfrak{c}^*}{[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*]}; \quad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{c}^*\times\mathfrak{a}^*}{[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*]}; \quad \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}^*\times\mathfrak{b}^*}{[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*]}. \tag{56a}$$

Daß diese Formeln (56 a, b) den Gleichungen (54) und (55) genügen, läßt sich mit Hilfe der Eigenschaften der gemischten Produkte sofort bestätigen, indem man etwa die erste der Gleichungen (56 a) mit $\mathfrak{a}$, dann mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ skalar multipliziert. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu einer Basis eine eindeutig bestimmte reziproke existiert, ist die, daß das gemischte Produkt der Grundvektoren der gegebenen Basis von Null verschieden ist, diese Grundvektoren also nicht komplanar sind.

Die Festsetzungen (55) haben einen einfachen geometrischen Sinn, der etwa an der Gleichung $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}^* = 1$ gezeigt werden soll. Bezeichnet man mit c und c^* die Beträge von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^*$, mit γ ihren Winkel (Fig. 27), so folgt

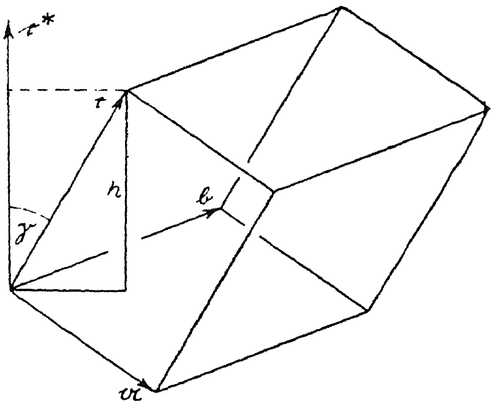


Fig. 27.

$$c c^* \cos\gamma = 1;$$

die Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^*$ bilden also einen spitzen Winkel. Damit ist, wenn das System $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als gegeben vorausgesetzt wird, der Richtungssinn von $\mathfrak{c}^*$ festgelegt; analog der von $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{b}^*$. Bezeichnet man ferner mit $h = c\cos\gamma$ die zu $\mathfrak{c}^*$ parallele Höhe des von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bestimmten Parallelepipeds, so ist

$$c^* h = 1;$$

damit sind auch die Beträge der Vektoren $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ bestimmt; sie sind die reziproken Werte der zu ihnen parallelen Höhen im Parallelepiped $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Eine analoge Beziehung gilt bei Vertauschung der beiden Systeme.

Auch zwischen den Rauminhalten

$$V = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] \text{ und } V^* = [\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*]$$

der von beiden Grundsystemen bestimmten Parallelepipede besteht ein einfacher Zusammenhang. Formt man

$$[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*] = \mathfrak{a}^* \cdot (\mathfrak{b}^* \times \mathfrak{c}^*)$$

mittels der beiden letzten Gleichungen (56 a) und (53 a) um:

$$[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*] = \mathfrak{a}^* \cdot \frac{(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2} = \mathfrak{a}^* \cdot \frac{\mathfrak{a}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]}{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2},$$

so folgt nach (55) sofort

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\,[\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*] = 1 \qquad (57)$$

oder

$$[\Gamma\Gamma^*] = 1. \tag{57'}$$

Man macht nach (57) nebenbei die nicht unwichtige Bemerkung, daß die beiden reziproken Grundsysteme entweder beide Rechts- oder beide Linkssysteme sind.

Die einzigen Grundsysteme, die zu sich selbst reziprok sind, sind die Dreibeine.

25. Eine Anwendung der reziproken Systeme. Um eine erste Anwendung der reziproken Systeme zu geben, soll die schon wiederholt behandelte Aufgabe wieder aufgenommen werden, einen Vektor $\mathfrak{r}$ auf eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu beziehen, d. h. ihn linear durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ darzustellen [vgl. (4)]:

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}. \tag{58}$$

Die Maßzahlen x, y, z sind in folgender Weise zu erhalten: multipliziert man (58) skalar mit den Grundvektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ der reziproken Basis, so folgt

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}^* = x; \quad \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{b}^* = y; \quad \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}^* = z. \tag{59}$$

Die zur Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gehörigen Maßzahlen eines Vektors $\mathfrak{r}$ sind also die skalaren Produkte des Vektors $\mathfrak{r}$ mit den reziproken Grundvektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$.

Mithin ergibt sich folgende *Identität*:

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}^*)\mathfrak{a} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{b}^*)\mathfrak{b} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}^*)\mathfrak{c}, \tag{60a}$$

oder unter Weglassung der Klammern

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{c}^*\mathfrak{c};$$

dafür kann auch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^*\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}^*\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}^*\cdot\mathfrak{r} \tag{60b}$$

geschrieben werden.

§ 5. Unbestimmtes Produkt.

26. Affine Abbildung. Eine allgemeine (nicht ausgeartete) affine Abbildung des Raumes kann in der Weise hergestellt werden, daß man jedem auf eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit dem Scheitel O bezogenen Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c} \tag{61}$$

denjenigen auf die Basis $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ mit dem Scheitel O' bezogenen Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ zuordnet, der die gleichen Maßzahlen besitzt, also den Vektor

$$\mathfrak{r}' = x\mathfrak{a}' + y\mathfrak{b}' + z\mathfrak{c}'. \tag{62}$$

Nach (59) sind die zur Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gehörigen Maßzahlen x, y, z von $\mathfrak{r}$ die skalaren Produkte von $\mathfrak{r}$ mit den reziproken Grundvektoren $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$; also

$$x = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}^*, \quad y = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b}^*, \quad z = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{c}^*.$$

Mithin wird

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}^* \mathfrak{a}' + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b}^* \mathfrak{b}' + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{c}^* \mathfrak{c}', \tag{63a}$$

wofür auch

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a}' \mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{b}' \mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{c}' \mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{r} \tag{63b}$$

geschrieben werden kann.

Man bemerkt, daß speziell den Werten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{r}$ die Werte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ von $\mathfrak{r}'$ zugeordnet sind, und erkennt in (63a, b) vom Bezugssystem unabhängige Formeln für diejenige affine Abbildung, welche 4 gegebenen Punkten, nämlich O und den Endpunkten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ 4 gegebene Punkte, nämlich O' und die Endpunkte von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, zuordnet.

Bei der affinen Abbildung ist jedem im Endlichen gelegenen Punkt ein im Endlichen gelegener Punkt zugeordnet, jedem unendlich fernen ein unendlich ferner. Da bei der Abbildung die Maßzahlen eines Punktes ungeändert bleiben, bleibt auch die Gleichung jeder Fläche ungeändert; insbesondere geht eine Ebene durch die affine Abbildung in eine Ebene über, die im zweiten System dieselbe Gleichung besitzt wie die Ausgangsebene im ersten. Die unendlich ferne Ebene geht in sich selbst über.

27. Übergang zu Koordinaten. Wenn man die sich entsprechenden Punkte O' und O zusammenlegt, kann man den Bildvektor $\mathfrak{r}'$ auf die ursprüngliche Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ beziehen. Bezeichnet man seine zu dieser Basis gehörigen Maßzahlen mit x', y', z', so hat man

$$\mathfrak{r}' = x'\mathfrak{a} + y'\mathfrak{b} + z'\mathfrak{c} \tag{64}$$

zu setzen.

Die Berechnung von x', y', z' läßt sich durchführen, wenn man vor allem die Grundvektoren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ bezogen auf die Ausgangsbasis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ kennt. Es sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}' &= a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c}, \\ \mathfrak{b}' &= a_{21}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{c}, \\ \mathfrak{c}' &= a_{31}\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}; \end{aligned} \tag{65}$$

die 9 Maßzahlen a_{ik} sind beliebig bis auf die Beschränkung, daß ihre Determinante von Null verschieden sein muß, da $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nicht komplanar sein dürfen:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{66}$$

Damit wird nach (62)

$$\mathfrak{r}' = x(a_{11}\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c}) + y(a_{21}\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{c}) + z(a_{31}\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c})$$

oder

$$\mathfrak{r}' = (a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\mathfrak{a} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)\mathfrak{b} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\mathfrak{c}. \tag{67}$$

Diese Gleichung gibt den Bildvektor $\mathfrak{r}'$ auf die ursprüngliche Basis bezogen; durch Vergleich mit (64) erhält man seine Maßzahlen:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z; \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z; \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{68}$$

Damit sind die Transformationsgleichungen für die Koordinaten eines Punktes bei der allgemeinen (nicht ausgearteten) affinen Abbildung unter Zugrundelegung eines festen Koordinatensystems gewonnen. Aus den Koordinaten x, y, z eines Punktes P werden die Koordinaten x', y', z' seines Bildpunktes P' durch eine allgemeine homogene lineare Transformation gewonnen mit 9 Koeffizienten, deren Determinante nicht verschwindet.

28. Lineare Vektorfunktion. Die Gleichungen (63a, b) ordnen einem veränderlich gedachten Ortsvektor $\mathfrak{r}$ als Bild einen veränderlichen Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ zu. $\mathfrak{r}'$ heißt eine Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{r}),$$

und zwar eine lineare Vektorfunktion wegen folgender, aus (63a, b) unmittelbar ersichtlichen Eigenschaften:

a) Sind

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{s}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{s})$$

die Bildvektoren zweier Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, so gilt

$$\mathfrak{r}' + \mathfrak{s}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{r} + \mathfrak{s}).$$

b) Bedeutet k einen beliebigen Skalar, so ist

$$k\mathfrak{r}' = \mathfrak{f}(k\mathfrak{r}).$$

Diese Eigenschaften folgen auch aus der in (68) gegebenen Darstellung der Koordinaten des Bildvektors $\mathfrak{r}'$ als lineare homogene Funktionen der Koordinaten des Vektors $\mathfrak{r}$.

Die skalaren Formeln (68) sind den vektoriellen (63) gleichwertig; man kann aus ihnen unter Einführung einer beliebigen Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu den vektoriellen Formeln zurückkehren, indem man den beim Übergang zu den skalaren Formeln gemachten Weg schrittweise in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Da die homogene lineare Transformation für nicht mehr als 9 Koeffizienten Raum bietet, ist mit der vektoriellen Darstellung (63) die **allgemeinste lineare Vektorfunktion** bereits gewonnen.

Indessen treten lineare Vektorfunktionen häufig in anderen Formen auf. So ist die Funktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}, \tag{69}$$

wo $\mathfrak{u}$ ein konstanter Vektor ist, sicher eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$, da sie die Eigenschaften a) und b) besitzt. Der Übergang zur Form (63) ist mit den bisherigen Hilfsmitteln etwa in folgender Weise möglich: Man setzt, was auf unendlichviele Weise möglich, $\mathfrak{u}$ selbst in die Form eines Vektorprodukts:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B};$$

dann erhält man für

$$\mathfrak{r}' = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{r}$$

nach dem Entwicklungssatz

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{A}. \tag{70}$$

Das ist eine spezielle lineare Vektorfunktion von der Form (63a). Die zugehörige affine Abbildung (69) ist **ausgeartet**; allen Ortsvektoren $\mathfrak{r}$, die von O nach den Punkten des Raumes führen, sind nur die Ortsvektoren $\mathfrak{r}'$ der Punkte einer Ebene zugeordnet, die auf $\mathfrak{u}$ senkrecht steht. Über derartige ausgeartete affine Abbildungen wird noch zu sprechen sein.

Eine weitere sehr einfache lineare Vektorfunktion ist

$$\mathfrak{r}' = p\mathfrak{r}, \tag{71}$$

wo p eine skalare Konstante ist. Unter Einführung zweier beliebiger reziproker Grundsysteme läßt sie sich etwa zufolge der Identität (60b) in die Form (63b) setzen:

$$\mathfrak{r}' = p\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{r} + p\mathfrak{b}\mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{r} + p\mathfrak{c}\mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{r}.$$

Die zugehörige affine Abbildung ist eine ähnliche Abbildung mit dem Maßstab p. Die Identitäten (60) selbst entsprechen der identischen affinen Abbildung $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$, die jeden Punkt in sich selbst überführt.

Die lineare Vektorfunktion, die geometrisch durch die affine Abbildung versinnbildlicht werden kann, ist nicht nur von Wert für die analytische Behandlung dieser geometrischen Aufgabe; ihre Hauptbedeutung liegt vielmehr auf dem Gebiet der Mechanik und allgemeiner der theoretischen Physik. Der Zusammenhang zwischen zwei bei einem physikalischen Zustand oder Vorgang in einem Punkt physikalisch oder geometrisch definierten Vektorgrößen ist sehr häufig durch eine lineare Vektorfunktion gegeben; die zugehörige affine Abbildung kann dann zur geometrischen Veranschaulichung dieses Zusammenhangs herangezogen werden. In Kap. 5 werden mechanische Anwendungen der linearen Vektorfunktion behandelt.

29. Reduktion einer linearen Vektorfunktion. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \cdots \mathfrak{A}_n$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3 \cdots \mathfrak{B}_n$ zwei Reihen von beliebigen Vektoren, so ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3 + \cdots \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n \tag{72a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{r} + \cdots \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{r} \tag{72b}$$

eine lineare Vektorfunktion, da sie den Bedingungen a) und b) Ziff. 28 genügt. Da aber diese lineare Vektorfunktion nicht von größerer Allgemeinheit sein kann als die lineare Vektorfunktion (63a, b), muß es möglich sein, eine n-gliedrige Summe von Summanden der Form $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i$ oder $\mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{r}$ auf eine dreigliedrige Summe von Summanden der gleichen Form zu reduzieren.

Um diese Reduktion durchzuführen, hat man folgende einfachen Rechengesetze bereitzustellen, deren Richtigkeit offensichtlich ist, sobald man die skalaren Produkte in Klammern setzt:

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2); \tag{73a}$$

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B} = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \mathfrak{B}; \tag{73b}$$

nebst entsprechenden Gesetzen für rechtsstehenden Ortsvektor.

Wenn man nun in (72a) die n Vektoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_n$ auf eine beliebige Basis $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ bezieht, und nach (73a, b) die entstehenden $3n$ Summanden von der Form $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_i \mathfrak{B}_k$ $(i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3 \cdots n)$ nach $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_3$ ordnet, so ist die Reduktion auf eine dreigliedrige Summe durchgeführt.

Wenn man statt dessen die n Vektoren $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \cdots \mathfrak{B}_n$ auf eine beliebige Basis $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ bezieht, so ergibt sich ein zweiter Weg für die Reduktion.

In der gleichen Weise kann man die Form (72b) der linearen Vektorfunktion reduzieren.

Man erkennt auf diese Weise neuerdings, daß eine dreigliedrige Summe von der Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 \tag{74a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\cdot\mathfrak{r}, \tag{74b}$$

wie sie in (63a, b) bereits mit etwas anderer Bezeichnung aufgetreten ist, die allgemeinste lineare Vektorfunktion ist.

In speziellen Fällen läßt sich die dreigliedrige Summe auf eine zweigliedrige reduzieren, nämlich dann, wenn die Vektoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ oder die Vektoren $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ komplanar sind. Die typischen Formen für eine derart ausgeartete lineare Vektorfunktion sind

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2, \tag{75a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\cdot\mathfrak{r}. \tag{75b}$$

Eine letzte Reduktion ist möglich, wenn die Vektoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ oder $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ kollinear sind; dann ergibt die Reduktion die Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \tag{76a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r}\cdot \tag{76b}$$

Während die allgemeine nicht ausgeartete lineare Vektorfunktion (74) eine nicht ausgeartete *affine Abbildung* vermittelt und allen Punkten des Raumes $\mathfrak{r}$ alle Punkte des Raumes $\mathfrak{r}'$ zuordnet, vermittelt die ausgeartete lineare Vektorfunktion (75) eine *ausgeartete affine Abbildung* und ordnet den Punkten des Raumes $\mathfrak{r}$ nur die Punkte der durch die beiden Vektoren $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ bestimmten Ebene des Raumes $\mathfrak{r}'$ zu; die letzte Ausartung (76b) der linearen Vektorfunktion vermittelt eine *letzte Ausartung der affinen Abbildung* und ordnet allen Punkten des Raumes $\mathfrak{r}$ nur die Punkte derjenigen Geraden des Raumes $\mathfrak{r}'$ zu, welche in Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$ durch den Anfangspunkt geht.

30. Dyadisches Produkt und Dyade. Für eine lineare Vektorfunktion in der typischen Form (72a, b) oder speziell (74a, b, 75a, b, 76a, b) kann eine abgekürzte Schreibweise eingeführt wer-

den, indem der gemeinsame Faktor $\mathfrak{r}$ der in allen Summanden auftretenden skalaren Produkte in formaler Weise ausgehoben wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}' &= \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 + \cdots \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n \\ &= \mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 + \cdots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n);\end{aligned} \tag{77a}$$

ebenso

$$\mathfrak{r}' = (\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3 + \cdots \mathfrak{B}_n\mathfrak{A}_n)\cdot\mathfrak{r}. \tag{77b}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck, zu dessen abgekürzter Bezeichnung griechische Buchstaben Φ bez. $\overline{\Phi}$ Verwendung finden sollen:

$$\Phi = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 + \cdots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n, \quad (n \geqq 1) \tag{78a}$$

$$\overline{\Phi} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3 + \cdots \mathfrak{B}_n\mathfrak{A}_n, \tag{78b}$$

besitzt zunächst keine reale Existenz, sondern nur symbolische Bedeutung, und gewinnt erst Leben in Verbindung mit einem Vektor $\mathfrak{r}$, dem er nach Festsetzung den in (72a, b) ausführlich angeschriebenen Vektor $\mathfrak{r}'$ zuordnet; dafür kann also abgekürzt

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Phi \tag{79a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \overline{\Phi}\cdot\mathfrak{r} \tag{79b}$$

geschrieben werden. In diesen Gleichungen kann der symbolische Faktor Φ bzw. $\overline{\Phi}$ als Operator aufgefaßt werden, welcher die affine Abbildung des Raumes $\mathfrak{r}$ in den Raum $\mathfrak{r}'$ vermittelt, oder — ohne Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen — dem Vektor $\mathfrak{r}$ eine lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{r})$ zuordnet.

Man kann indessen durch eine geeignete Festsetzung erreichen, daß der symbolisch als Operator definierte Ausdruck Φ bzw. $\overline{\Phi}$ eine selbständige Existenz besitzt. Hierzu betrachtet man zunächst nach (76a) einen eingliedrigen Ausdruck $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; die genauere Schreibweise mit Klammern $(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A})\mathfrak{B}$ läßt erkennen, daß ein Produkt aus 3 Faktoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in der Weise zu bilden ist, daß zuerst die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{A}$ skalar multipliziert werden, und mit dem erhaltenen Skalar $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}$ der Vektor $\mathfrak{B}$ in gewöhnlicher Weise vervielfacht wird. Demgegenüber führt die Tatsache, daß es zulässig ist, die Klammern wegzulassen, zu folgender Auffassung: Die angegebene Reihenfolge der Produktbildungen ist nicht die einzig mögliche, es ist vielmehr ebenso richtig, zuerst ein „unbestimmtes" Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zu bilden und dieses dann in geeigneter Weise skalar mit $\mathfrak{r}$ zu multiplizieren. Die unbestimmte Multiplikation

zweier Vektoren ist geradezu dadurch definiert, daß sie mit der skalaren assoziativ ist:

$$(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \tag{80a}$$

ähnlich

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r}) = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r} = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\cdot\mathfrak{r}. \tag{80b}$$

Das unbestimmte Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zweier Vektoren wird oft auch unter Bezug auf die Zweizahl der Faktoren als dyadisches Produkt bezeichnet; die in (78a, b) definierten Operatoren Φ und $\bar{\Phi}$ haben die Form einer Summe von n dyadischen Produkten und sollen Dyaden heißen.

Dyadische Produkte und Dyaden sind weder Skalare noch Vektoren, sondern Größen höherer Art, denen eine unmittelbare geometrische Bedeutung nicht beizulegen ist. Faßt man, wie das in Ziff. 2 angedeutet wurde und später genauer ausgeführt werden wird, die Vektoren als extensive Größen auf, so wird man die Dyaden als extensive Größen 2. Stufe bezeichnen können.

Für Leser, welche abstrakten Untersuchungen abgeneigt sind und den Wert der Vektorrechnung in ihrer Anwendbarkeit auf theoretische Physik und Mechanik sehen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die Einführung der Dyade als Größe, ihre Bezeichnung durch ein Symbol, und das formale Rechnen mit Dyaden in erster Linie einem praktischen Bedürfnis entspricht. Einer der Hauptvorzüge der Vektorrechnung ist die Möglichkeit, mit geometrischen und physikalischen Größen selbst zu rechnen statt mit irgendwelchen Bestimmungsstücken dieser Größen bei Einführung eines willkürlichen und deshalb unwesentlichen Bezugssystems; will man nicht in den zahlreichen Fällen, in denen zwischen zwei Vektorgrößen ein linearer Zusammenhang besteht, auf diesen Vorzug wieder verzichten und in die Koordinatenrechnung zurückfallen, so ist die Einführung der formalen Dyadenrechnung eine Notwendigkeit. Man lasse sich also durch die Nüchternheit und scheinbare Unfruchtbarkeit der Dyadenrechnung nicht abschrecken; ihr Wert wird klar, wenn man sich die Mühe genommen hat, sie kennenzulernen. — Im übrigen handelt es sich bei den folgenden Ziffern (31 bis 38) hauptsächlich um eine vorläufige Kenntnisnahme; das meiste, was sie enthalten, erscheint später nochmals von einem höheren Gesichtspunkt aus.

31. Gesetze der dyadischen Multiplikation. Da $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ für beliebiges $\mathfrak{r}$ nicht verschwindet, ohne daß $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ Null ist, ver-

schwindet auch das dyadische Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nicht, ohne daß ein Faktor Null ist.

Da ferner $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein Vektor in Richtung von $\mathfrak{B}$ ist, während $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ in die Richtung von $\mathfrak{A}$ fällt, ist im allgemeinen

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{A};$$

es sind also die Operatoren $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ verschieden. D. h. für dyadische Produkte gilt das kommutative Gesetz nicht; es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}. \tag{81}$$

Dagegen gilt das distributive Gesetz zufolge (73a, b)):

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2; \tag{82a}$$

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}. \tag{82b}$$

Was über die Reduktion der linearen Vektorfunktion gesagt wurde, gilt nach (82a, b) auch für die als Operator auftretende Dyade. Jede n-gliedrige Dyade läßt sich auf eine dreigliedrige Dyade mit vorgegebenen, nicht komplanaren Linksfaktoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ oder vorgegebenen, nicht komplanaren Rechtsfaktoren $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ vom Typus

$$\Phi = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 \tag{83}$$

reduzieren; diese heißt vollständige Dyade, wenn sie nicht weiter reduzierbar ist. Ergeben sich bei einer Reduktion entweder die Linksfaktoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ oder die Rechtsfaktoren $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ als komplanar, so ist die Reduktion auf eine zweigliedrige planare Dyade vom Typus

$$\Phi = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 \tag{83'}$$

möglich; sind sie kollinear, so gibt es eine Reduktion auf ein dyadisches Produkt oder eine lineare Dyade:

$$\Phi = \mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{83''}$$

Das skalare Produkt eines Ortsvektors mit einer Dyade ist eine lineare Vektorfunktion, und zwar sowohl, wenn die Dyade rechts, als auch wenn sie links vom Vektor steht:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Phi; \quad \mathfrak{r}'' = \Phi\cdot\mathfrak{r}; \tag{84}$$

doch sind im allgemeinen diese beiden Vektorfunktionen verschieden, denn da

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r} \neq \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{r}$$

ist, ist auch

$$\mathfrak{r}\cdot\Phi \neq \Phi\cdot\mathfrak{r}. \tag{85}$$

Aus

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r} \tag{86}$$

folgt allgemeiner

$$\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \cdots \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n) = (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}_n) \cdot \mathfrak{r}. \tag{86'}$$

Zwei Dyaden

$$\Phi = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \cdots \mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n,$$
$$\overline{\Phi} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}_n,$$

in denen die Rechts- und Linksfaktoren vertauscht sind, werden als zueinander konjugiert bezeichnet; damit wird (86')

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi = \overline{\Phi} \cdot \mathfrak{r}. \tag{86''}$$

In einem skalaren Produkt aus einem Vektor und einer Dyade kann man die Reihenfolge der Faktoren vertauschen, wenn man gleichzeitig die Dyade durch ihre konjugierte ersetzt.

Geometrisch kann die vollständige Dyade als Operator einer nicht ausgearteten affinen Abbildung betrachtet werden; diese wird durch die Gleichungen

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3) \tag{87a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \overline{\Phi} \cdot \mathfrak{r} = (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{A}_3) \cdot \mathfrak{r} \tag{87b}$$

vermittelt.

Die planare Dyade ist der Operator einer ausgearteten affinen Abbildung in der Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2) \tag{88a}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \overline{\Phi} \cdot \mathfrak{r} = (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2) \cdot \mathfrak{r}. \tag{88b}$$

Die lineare Dyade ist der Operator der letzten Ausartung der affinen Abbildung in der Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{r}. \tag{89}$$

32. Neunerform der Dyade. Neben der typischen Form (83) bzw. (83') (83'') einer Dyade ist, namentlich wenn der Übergang zu Koordinaten in Frage kommt, noch eine andere Form von Wichtigkeit. Bezieht man in einer Dyade alle Vektoren, die als Links- und Rechtsfaktoren auftreten, auf dasselbe Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ als Basis, so treten bei Ausführung der dyadischen Multiplikation nach (82) die dyadischen Produkte je zweier Grundvektoren auf.

Die Dyade erscheint in der „Neunerform“

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{i}\mathfrak{k}\\ + a_{21}\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{j}\mathfrak{k}\\ + a_{31}\,\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\,\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}.\end{aligned} \tag{90}$$

Die Summanden $a_{11}\,\mathfrak{i}\mathfrak{i}$, $a_{12}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j}$, $\cdots a_{33}\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}$ heißen die Komponenten der Dyade, die Skalare a_{11}, a_{12}, $\cdots a_{33}$ ihre Maßzahlen.

Für die lineare Vektorfunktion und affine Abbildung (79a)

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Phi$$

erhält man, wenn auch die Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ auf das Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezogen werden, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k} = (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})\cdot(a_{11}\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{i}\mathfrak{k}\\ + a_{21}\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{j}\mathfrak{k}\\ + a_{31}\,\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\,\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}).\end{aligned} \tag{91}$$

Um das auf der rechten Seite stehende Produkt zu berechnen, hat man zunächst mit den Komponenten von $\mathfrak{r}$ die Linksfaktoren der Dyade zu multiplizieren; auf diese Weise entsteht ein Aggregat von 27 Summanden, von denen nur diejenigen 9 von Null verschieden sind, in denen die skalaren Produkte gleicher Einheitsvektoren vorkommen:

$$\begin{aligned}x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k} = a_{11}x\mathfrak{i} + a_{12}x\mathfrak{j} + a_{13}x\mathfrak{k}\\ + a_{21}y\mathfrak{i} + a_{22}y\mathfrak{j} + a_{23}y\mathfrak{k}\\ + a_{31}z\mathfrak{i} + a_{32}z\mathfrak{j} + a_{33}z\mathfrak{k}.\end{aligned} \tag{92}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Transformationsformeln für die Koordinaten ablesen:

$$\begin{aligned}x' = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z;\\ y' = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z;\\ z' = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z;\end{aligned} \tag{93}$$

sie stimmen formal mit den Gleichungen (68) überein, sind aber doch weniger allgemein, weil in der Verwendung eines Dreibeins als Basis eine freiwillige Einschränkung liegt.

Von dieser Einschränkung kann man sich leicht frei machen. Bezieht man die Rechtsfaktoren der Dyade Φ auf eine beliebige Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die Linksfaktoren auf die reziproke Basis $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$, so nimmt die Dyade Φ folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\,\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + a_{12}\,\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} + a_{13}\,\mathfrak{a}^*\mathfrak{c}\\ + a_{21}\,\mathfrak{b}^*\mathfrak{a} + a_{22}\,\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + a_{23}\,\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}\\ + a_{31}\,\mathfrak{c}^*\mathfrak{a} + a_{32}\,\mathfrak{c}^*\mathfrak{b} + a_{33}\,\mathfrak{c}^*\mathfrak{c};\end{aligned} \tag{94}$$

dabei sind die numerischen Werte der Maßzahlen $a_{11}, a_{12} \cdots a_{33}$ von der Wahl der Basis $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ abhängig.

Nun sollen die Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ ebenfalls auf die Basis $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezogen werden; ihre Maßzahlen seien x, y, z bzw. x', y', z'. Dann geht die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

über in

$$\begin{aligned} x'\mathfrak{a} + y'\mathfrak{b} + z'\mathfrak{c} = (x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c}) \cdot (&a_{11}\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{a}^*\mathfrak{c} \\ &+ a_{21}\mathfrak{b}^*\mathfrak{a} + a_{22}\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{b}^*\mathfrak{c} \\ &+ a_{31}\mathfrak{c}^*\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{c}^*\mathfrak{b} + a_{33}\mathfrak{c}^*\mathfrak{c}). \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des auf der rechten Seite stehenden Produktes treten der Definition (54), (55) der reziproken Systeme zufolge wieder unter 27 Summanden nur 9 von Null verschiedene auf; es ergibt sich

$$\begin{aligned} x'\mathfrak{a} + y'\mathfrak{b} + z'\mathfrak{c} = &a_{11}x\mathfrak{a} + a_{12}x\mathfrak{b} + a_{13}x\mathfrak{c} \\ &+ a_{21}y\mathfrak{a} + a_{22}y\mathfrak{b} + a_{23}y\mathfrak{c} \\ &+ a_{31}z\mathfrak{a} + a_{32}z\mathfrak{b} + a_{33}z\mathfrak{c}, \end{aligned} \tag{95}$$

woraus wieder die skalaren Gleichungen (93) folgen, diesmal ohne Beschränkung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

33. Symmetrische Dyaden. Eine Dyade, welche sich bei Vertauschung der Links- und Rechtsfaktoren nicht ändert, also mit ihrer konjugierten identisch ist, heißt symmetrisch. In der Neunerform läßt sich die allgemeine symmetrische Dyade sofort ansetzen: (96)

$$\Phi = a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k} + a_{12}(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}) + a_{13}(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}) + a_{23}(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}).$$

Es wird später gezeigt werden, daß die einfacher aussehende symmetrische Dyade

$$\Phi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

in Wirklichkeit nicht spezieller ist, daß vielmehr jede symmetrische Dyade durch die Wahl eines geeigneten Dreibeins als Basis auf diese Form gebracht werden kann. Die durch sie vermittelte affine Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot (a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}),$$

in Koordinaten

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz,$$

ist eine Dehnung, die aus drei einfachen Dehnungen in Richtung der Achsen des Koordinatensystems mit den Maßstäben a, b, c zusammengesetzt ist.

Von besonderer Wichtigkeit unter den symmetrischen Dyaden ist die Dyade

$$I = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}; \tag{97}$$

Hier sind die Maßstäbe $a = b = c = 1$. Sie vermittelt die identische Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) = \mathfrak{r}$$

und wird als Dyade „Eins“ bezeichnet. Aus der Identität (60a) läßt sich ablesen, daß die Dyade „Eins“ in die allgemeinere Form

$$I = \mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c} \tag{97'}$$

unter Verwendung einer beliebigen Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und der reziproken Basis $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ gebracht werden kann.

34. Antisymmetrische Dyaden. Eine Dyade, die bei Vertauschung der Links- und Rechtsfaktoren ihr Vorzeichen ändert, heißt antisymmetrisch. In der Neunerform läßt sich die allgemeine antisymmetrische Dyade sofort ansetzen:

$$\Phi = a_{12}(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}) + a_{23}(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j}) + a_{31}(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}). \tag{98}$$

Später, Ziff. 140, wird gezeigt, daß die einfacher aussehende Dyade

$$\Phi = a_{12}(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i})$$

oder auch etwas allgemeiner

$$\Phi = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} \tag{98'}$$

nicht spezieller ist, daß vielmehr jede antisymmetrische Dyade durch geeignete Wahl der Basis in diese Form gebracht werden kann.

Die Dyade (98′) ist als zweigliedrige Dyade planar. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Entwicklungssatz (50) für dreifache Vektorprodukte in eine neue Form bringen [vgl. (70)]:

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{r} \cdot \tag{99}$$

Betrachtet man $\mathfrak{r}$ als Ortsvektor, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als feste Vektoren, so sagt diese Gleichung neuerdings aus, daß sämtliche Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ des Raumes durch vektorielle Multiplikation mit einem festen Vektor $\mathfrak{u} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ in die Vektoren einer Ebene $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ übergeführt werden.

In dieser Weise kann überhaupt jede vektorielle Multiplikation mit einem Vektor durch eine skalare Multiplikation mit einer antisymmetrischen Dyade ersetzt werden. Es gilt z. B.

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{r} = (\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}) \cdot \mathfrak{r}; \tag{100a}$$

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}). \tag{100b}$$

Setzt man nämlich $\mathfrak{k} = \mathfrak{i} \times \mathfrak{j}$, so folgt die Behauptung aus (99). Dabei ist zu bemerken, daß $\mathfrak{k}$ einen beliebigen Einheitsvektor bedeuten kann, $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ zwei zugehörige Einheitsvektoren eines Rechtssystems.

Hieraus ist ersichtlich, daß die drei bisher eingeführten Arten der Multiplikation zweier Vektoren, nämlich die skalare, vektorielle und dyadische, nicht voneinander unabhängig sind, daß vielmehr eine von ihnen, nämlich die vektorielle, durch eine Verbindung der beiden andern ersetzt werden kann. Dabei kommt man überdies zu einer neuen Darstellung der Plangröße durch eine antisymmetrische Dyade (98′), welche der Darstellung durch ein Vektorprodukt überlegen ist. Trotzdem wird man auf letzteres nicht völlig verzichten wollen.

35. Skalares Produkt zweier Dyaden. Führt man 2 affine Abbildungen mittels der Dyaden Φ und Ψ nacheinander aus:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi;$$
$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}' \cdot \Psi = (\mathfrak{r} \cdot \Phi) \cdot \Psi,$$

so kann das Ergebnis auch durch eine einzige affine Abbildung

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r} \cdot X$$

erhalten werden. Man hat zur Bestimmung der sie vermittelnden Dyade X die Gleichung

$$(\mathfrak{r} \cdot \Phi) \cdot \Psi = \mathfrak{r} \cdot X. \tag{101}$$

Ist

$$\Phi = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3 = \sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\lambda .$$
$$\Psi = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{D}_3 = \sum_\mu \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{D}_\mu ,$$

so wird

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi = \mathfrak{r} \cdot \sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\lambda = \sum_\lambda (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_\lambda) \mathfrak{B}_\lambda$$
$$(\mathfrak{r} \cdot \Phi) \cdot \Psi = \sum_\lambda (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_\lambda) \mathfrak{B}_\lambda \cdot \sum_\mu \mathfrak{C}_\mu \mathfrak{D}_\mu$$
$$= \sum_\lambda \sum_\mu (\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{A}_\lambda)(\mathfrak{B}_\lambda \cdot \mathfrak{C}_\mu) \mathfrak{D}_\mu$$
$$= \mathfrak{r} \cdot \sum_\lambda \sum_\mu \mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda \cdot \mathfrak{C}_\mu) \mathfrak{D}_\mu .$$

Damit ist nach (101)

$$X = \sum_\lambda \sum_\mu \mathfrak{A}_\lambda (\mathfrak{B}_\lambda \cdot \mathfrak{C}_\mu) \mathfrak{D}_\mu .$$

Die rechte Seite kann als ein skalares Produkt der beiden Dyaden Φ und Ψ aufgefaßt werden, nach folgenden Regeln ausgeführt:

a) Das skalare Produkt zweier dyadischer Produkte wird gebildet, indem man die mittleren Faktoren skalar, die randlichen dyadisch miteinander multipliziert [vgl. (80a, b)]:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C})\mathfrak{D}. \tag{102}$$

b) Es gilt das distributive Gesetz in den beiden Formen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2; \tag{103a}$$

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2)\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D}. \tag{103b}$$

Somit wird

$$X = \sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\lambda\cdot\sum_\mu \mathfrak{C}_\mu\mathfrak{D}_\mu = \Phi\cdot\Psi;$$

und aus (101) folgt für die resultierende affine Abbildung

$$\mathfrak{r}'' = (\mathfrak{r}\cdot\Phi)\cdot\Psi = \mathfrak{r}\cdot(\Phi\cdot\Psi). \tag{104}$$

Diese Gleichung kann als Ausdruck eines assoziativen Gesetzes für Produkte aus einem Vektor und 2 Dyaden gelten; die Klammern sind entbehrlich.

36. Vektorprodukt einer Dyade mit einem Vektor. Die Erkenntnis, daß die skalare Multiplikation eines Vektors mit einer antisymmetrischen Dyade der vektoriellen Multiplikation mit einem geeigneten Vektor gleichwertig ist, führt nach (102) und (103a) zur Definition des Vektorprodukts aus Dyade und Vektor:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\times\mathfrak{u} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{u}) \tag{105}$$

Die Klammern sind entbehrlich.

Nach (103b) gilt das distributive Gesetz:

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2)\times\mathfrak{u} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{u} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\times\mathfrak{u}. \tag{106}$$

Das Vektorprodukt $\Phi\times\mathfrak{C}$ aus einer Dyade und einem Vektor ist selbst eine Dyade; bei der Ausführung des Produkts bleiben die Linksfaktoren von Φ unberührt. Hieraus folgt die Möglichkeit einer Erweiterung des Vertauschungssatzes für gemischte Produkte:

$$(\Phi\times\mathfrak{C})\cdot\mathfrak{D} = \Phi\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}). \tag{107}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung kann die Klammer nicht ohne Gefahr eines Mißverständnisses weggelassen werden.

37. Doppeltskalares Produkt. Da das skalare Produkt aus einem Vektor und einer Dyade ein Vektor ist, ist eine nochmalige skalare Multiplikation mit einem Vektor möglich. Und zwar ist

$$(\mathfrak{r}\cdot\Phi)\cdot\mathfrak{s} = \sum_\lambda(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{A}_\lambda)(\mathfrak{B}_\lambda\cdot\mathfrak{s}).$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich für $\mathfrak{r}\cdot(\Phi\cdot\mathfrak{s})$. Es gilt also das *assoziative* Gesetz in der Form

$$(\mathfrak{r}\cdot\Phi)\cdot\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\cdot(\Phi\cdot\mathfrak{s}) = \mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{s}. \tag{108}$$

Anderseits ist

$$(\mathfrak{r}\cdot\Phi)\cdot\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\cdot(\mathfrak{r}\cdot\Phi);$$

die erste skalare Multiplikation (mit $\mathfrak{r}$) stellt eine Verknüpfung mit den Linksfaktoren von Φ her, die zweite (mit $\mathfrak{s}$) eine Verknüpfung mit den Rechtsfaktoren; es liegt nahe,

$$\mathfrak{s}\cdot(\mathfrak{r}\cdot\Phi) = \mathfrak{s}\mathfrak{r}\cdot\cdot\,\Phi \tag{109}$$

zu schreiben. Für dieses *doppeltskalare Produkt* gilt nach (108) das kommutative Gesetz:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{r}\cdot\cdot\,\Phi = \Phi\cdot\cdot\,\mathfrak{s}\mathfrak{r}. \tag{110}$$

Schreibt man abkürzend (ähnlich wie Ziff. 30 bei Einführung der Dyaden);

$$\sum_{\mu}[\Phi\cdot\cdot\,\mathfrak{C}_{\mu}\mathfrak{D}_{\mu}] = \Phi\cdot\cdot\sum_{\mu}\mathfrak{C}_{\mu}\mathfrak{D}_{\mu}, \tag{110'}$$

so ist damit das *doppeltskalare Produkt zweier Dyaden* $\Phi\cdot\cdot\,\Psi$ definiert:

$$\sum_{\lambda}\mathfrak{A}_{\lambda}\mathfrak{B}_{\lambda}\cdot\cdot\sum_{\mu}\mathfrak{C}_{\mu}\mathfrak{D}_{\mu} = \sum_{\lambda\mu}(\mathfrak{A}_{\lambda}\cdot\mathfrak{D}_{\mu})(\mathfrak{B}_{\lambda}\cdot\mathfrak{C}_{\mu}).$$

Auch für dieses Produkt gilt nach (110) das kommutative Gesetz:

$$\Phi\cdot\cdot\,\Psi = \Psi\cdot\cdot\,\Phi. \tag{110''}$$

38. Der Tensorbegriff. Der Umstand, daß sich unter den affinen Abbildungen die *Dehnung* befindet, hat dazu geführt, den diese Dehnung vermittelnden Operator, die symmetrische Dyade, als *Tensor* zu bezeichnen. Heute gebraucht man das Wort Tensor in viel allgemeinerem Sinn; *man versteht unter einem Tensor eine homogene Summe von unbestimmten Produkten aus beliebig vielen Faktoren*, deren Anzahl *Stufe* des Tensors genannt wird. Damit ist also die *Dyade als Tensor 2. Stufe* zu bezeichnen, während der *Vektor als Tensor 1. Stufe* zu gelten hat; auch die gelegentliche Bezeichnung eines *Skalars als Tensor nullter Stufe* besitzt Berechtigung.

Der Tensor $n$ter Stufe ist also eine homogene Form $n$ten Grades, aus Vektoren in formaler Weise aufgebaut.

Ein *Tensor 3. Stufe* z. B. kann folgendermaßen aussehen:

$$\tau = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 + \cdots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n\mathfrak{C}_n. \tag{111}$$

wobei ohne Beweis erwähnt werden soll, daß der allgemeine Tensor 3. Stufe 9 Summanden enthält; bei Beziehung sämtlicher Vektoren auf ein Dreibein entsteht folgender Ausdruck von 27 Summanden:

$$\begin{aligned}\tau = a_{111}\,\mathfrak{iii} + a_{112}\,\mathfrak{iij} + a_{113}\,\mathfrak{iik} \\ + a_{121}\,\mathfrak{iji} + a_{122}\,\mathfrak{ijj} + a_{123}\,\mathfrak{ijk} + \cdots a_{333}\,\mathfrak{kkk}.\end{aligned} \qquad (111')$$

Dabei gelten für das unbestimmte Produkt von mehr als 2 Faktoren folgende formalen Gesetze:

a) das *assoziative Gesetz*:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}; \qquad (112)$$

b) das *distributive Gesetz*, z. B. für den ersten Faktor:

$$(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}\mathfrak{C} \qquad (113)$$

Man kann diese Gesetze in ähnlicher Weise begründen wie das distributive Gesetz (82) für dyadische Produkte, und sie schrittweise für beliebig viele Faktoren erweitern, wenn man sich damit begnügt, die Tensoren höherer als zweiter Stufe ähnlich wie die Dyaden als Operatoren zu betrachten; schreibt man jedoch den Tensoren als Größen höherer Art eine selbständige Existenz zu, so tut man am besten, *die beiden Gesetze zu postulieren und sich auf ihre Widerspruchsfreiheit zu berufen.*

Das distributive Gesetz findet seine erste Verwendung bei der Reduktion eines Tensors auf seine typische Form von möglichst wenig Summanden, oder bei Einführung einer Basis, z. B. eines Dreibeins als Bezugssystem.

Kapitel 2.

Von skalaren Parametern abhängige Vektoren.

§ 1. Differentiation eines Vektors nach einem Parameter.

39. Erklärung der Differentiation eines Vektors. Wenn die auf eine feste Basis bezogenen Koordinaten eines Vektors Funktionen eines Parameters u sind, so wird der Vektor selbst als eine Funktion

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u) \tag{1}$$

dieses Parameters betrachtet. Das geometrische Bild eines derart veränderlichen Vektors ist eine Raumkurve, deren Punkte den Werten des Parameters u zugeordnet sind, wobei der Ortsvektor eines jeden Punktes der seinem Parameterwert entsprechende Vektor $\mathfrak{r}(u)$ ist.

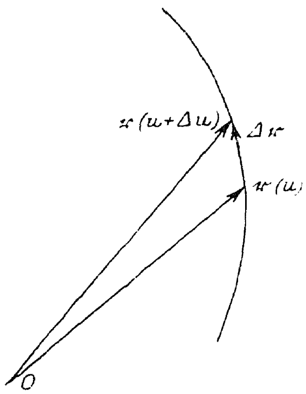


Fig. 28.

Aus diesem Vektor $\mathfrak{r}(u)$ erhält man einen neuen Vektor $\frac{d\mathfrak{r}}{du}$ durch Differentiation nach u nach folgender Definition:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathfrak{r}(u + \Delta u) - \mathfrak{r}(u)}{\Delta u}. \tag{2}$$

$\frac{d\mathfrak{r}}{du}$ ist ein Vektor in Richtung der Tangente der Raumkurve; dieser Tangentenvektor entsteht durch Grenzübergang aus $\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta u}$; hier ist $\Delta\mathfrak{r}$ eine Sehne der Raumkurve (Fig. 28). Der infinitesimale Vektor $d\mathfrak{r}$ wird als gerichtetes Bogen- oder Linienelement, sein Betrag $|d\mathfrak{r}|$ kurz als Linienelement bezeichnet. Die Ausführung der Differentiation geschieht bei Zugrundelegung eines Dreibeins $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in folgender Weise:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z;$$
$$\frac{d\mathfrak{r}}{du} = \mathfrak{i}\frac{dx}{du} + \mathfrak{j}\frac{dy}{du} + \mathfrak{k}\frac{dz}{du}. \tag{3}$$

Entsprechend bei allgemeiner Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z;$$
$$\frac{d\mathfrak{r}}{du} = \mathfrak{a}\frac{dx}{du} + \mathfrak{b}\frac{dy}{du} + \mathfrak{c}\frac{dz}{du}. \tag{3'}$$

Die Ausführung höherer Differentiationen, ebenso die der Integration eines Vektors nach einem Parameter erklärt sich in derselben Weise:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{du^2} = \mathfrak{a}\frac{d^2x}{du^2} + \mathfrak{b}\frac{d^2y}{du^2} + \mathfrak{c}\frac{d^2z}{du^2};$$
$$\int_{u_0}^{u}\mathfrak{r}\,du = \mathfrak{a}\int_{u_0}^{u}x\,du + \mathfrak{b}\int_{u_0}^{u}y\,du + \mathfrak{c}\int_{u_0}^{u}z\,du. \tag{3''}$$

Verwendet man an Stelle des beliebigen Parameters u die Zeit t, so ist $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf der Raumkurve bewegt; und $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ die Beschleunigung dieser Bewegung.

Beispiel: Wird der Vektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\cos u + \mathfrak{b}\sin u$$

als Ortsvektor aufgetragen, so beschreibt sein Endpunkt eine Ellipse mit der Parameterdarstellung

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u,$$

wenn a und b die Beträge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnen. Dabei sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wenn sie aufeinander senkrecht stehen, Vektoren von der Länge und Richtung der Halbachsen, andernfalls zweier konjugierter Halbmesser.

Zu 2 Punkten der Ellipse mit den Parameterwerten u und $u + \frac{\pi}{2}$ gehören die Ortsvektoren

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a}\cos u + \mathfrak{b}\sin u,$$
$$\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{a}\sin u + \mathfrak{b}\cos u;$$

die zugehörigen Differentialquotienten sind

$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)_1 = -\mathfrak{a}\sin u + \mathfrak{b}\cos u,$$
$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{du}\right)_2 = -\mathfrak{a}\cos u - \mathfrak{b}\sin u;$$

sie lassen erkennen, daß die Tangenten in den Endpunkten der beiden Halbmesser $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ parallel zu $\mathfrak{r}_2$, bzw. $-\mathfrak{r}_1$ sind. $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ sind konjugierte Halbmesser.

Setzt man $u = \omega t$, wo t die Zeit bedeutet, so ist

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \omega(-\mathfrak{a} \sin \omega t + \mathfrak{b} \cos \omega t)$$

die Geschwindigkeit,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \omega^2(-\mathfrak{a} \cos \omega t - \mathfrak{b} \sin \omega t) = -\omega^2 \mathfrak{r}$$

die Beschleunigung der Bewegung; die Beschleunigung fällt in die Richtung des Ortsvektors, ist ihm dem Betrag nach proportional und auf den Mittelpunkt zu gerichtet. Die Bewegung kann als eine elastische Schwingung aufgefaßt werden, die unter dem Einfluß einer nach dem Hookeschen Gesetz der Entfernung proportionalen Zentralkraft vor sich geht.

40. Differentiation eines Produkts. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ (ohne Multiplikationszeichen) möge für den Augenblick irgendein Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bedeuten, die Funktionen eines Parameters u sein sollen. Dann ist

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathfrak{A}(u + \Delta u)\mathfrak{B}(u + \Delta u) - \mathfrak{A}(u)\mathfrak{B}(u)}{\Delta u}.$$

Fügt man im Zähler $\mathfrak{A}(u)\mathfrak{B}(u + \Delta u)$ mit negativem und positivem Zeichen hinzu, so wird. bei Ausführung des Grenzübergangs in bekannter Weise,

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{du} = \frac{d\mathfrak{A}}{du}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{du}. \tag{4}$$

Diese Formel gilt für skalare, vektorielle und dyadische Multiplikation; in den beiden letzten Fällen hat man darauf zu achten, daß die Faktoren in den Summanden der rechten Seite nicht vertauscht werden dürfen.

In ähnlicher Weise werden mehrfache Produkte differentiiert, z. B.

$$\frac{d}{du}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{du}\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\right] + \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{du}\mathfrak{C}\right] + \left[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{C}}{du}\right]. \tag{4'}$$

Geometrische Anwendung: Die Gleichung

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = a^2 \tag{5}$$

kann, wenn $\mathfrak{r}$ von einem Parameter u abhängt, als Gleichung eines Kreises vom Radius a aufgefaßt werden. Die durch Differentiation entstehende Gleichung

$$\mathfrak{r} \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{du} = 0 \tag{5'}$$

ist der Ausdruck der Tatsache, daß die Kreistangente auf dem nach ihrem Berührungspunkt führenden Radius senkrecht steht.

Die Berechnung von $\frac{d\mathfrak{r}}{du}$ selbst ist in den für die Ellipse aufgestellten Formeln (Ziff. 39) als Spezialfall enthalten.

Die Gleichung eines Einheitskreises hat die Form

$$\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} = 1, \qquad (6)$$

wenn $\mathfrak{e}$ der in einen Radius fallende Einheitsvektor ist. Sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e} + d\mathfrak{e}$ zwei benachbarte Einheitsvektoren (Fig. 29), so ist $d\mathfrak{e}$ das ihre Endpunkte verbindende gerichtete Linienelement des Einheitskreises; es hat die Richtung eines Einheitsvektors $\mathfrak{e}_1$ der Tangente im Endpunkt von $\mathfrak{e}$. Der Betrag von $d\mathfrak{e}$ ist das Linienelement des Kreises, das mit ds bezeichnet werden soll und gleich dem zugehörigen Zentriwinkel $d\varepsilon$, im Bogenmaß gemessen, ist. Also ist der Differentialquotient eines Einheitsvektors

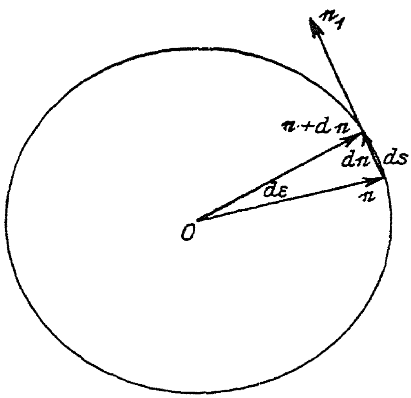


Fig. 29.

$$\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \mathfrak{e}_1;$$

oder

$$d\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 ds; \quad d\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 d\varepsilon. \qquad (6')$$

41. Drehung eines Dreibeins. Die durch eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in einem Punkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ hervorgebrachte Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist nach Ziff. 13 (31)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r};$$

drückt man $\mathfrak{v}$ durch $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ aus, so folgt

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}. \qquad (7)$$

Es soll jetzt $\mathfrak{u}$ auf ein Dreibein $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ als Basis bezogen werden, die als Rechtssystem vorausgesetzt sei:

$$\mathfrak{u} = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}. \qquad (8)$$

Für die Geschwindigkeiten der Endpunkte der drei Beine $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{i} = \quad * \quad a_3 \mathfrak{j} - a_2 \mathfrak{k}, \\ \frac{d\mathfrak{j}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{j} = - a_3 \mathfrak{i} \quad * \quad + a_1 \mathfrak{k}, \\ \frac{d\mathfrak{k}}{dt} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{k} = a_2 \mathfrak{i} - a_1 \mathfrak{j} \quad * \end{aligned} \qquad (9)$$

Die 3 Vektoren $\frac{d\mathfrak{i}}{dt}, \frac{d\mathfrak{j}}{dt}, \frac{d\mathfrak{k}}{dt}$ gehen aus den Vektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ durch eine ausgeartete affine Abbildung hervor, deren Determinante antisymmetrisch ist und verschwindet [vgl. Ziff. 27]:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Die affine Abbildung kann durch die antisymmetrische Dyade

$$\omega = a_1(\mathfrak{k}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{k}) + a_2(\mathfrak{i}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{i}) + a_3(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j}) \tag{11}$$

vermittelt werden [vgl. Ziff. 34]; die Gleichung (7) wird dann durch

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \omega \cdot \mathfrak{r} \tag{12}$$

ersetzt. Von dieser Darstellung wird indessen hier kein Gebrauch gemacht; erst viel später (Ziff. 243, 260), erlangt sie Wichtigkeit.

Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 lassen sich durch skalare Multiplikation der Gleichungen (9) mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bestimmen; so ist z. B.

$$a_1 = \frac{d\mathfrak{j}}{dt} \cdot \mathfrak{k} = -\mathfrak{j} \cdot \frac{d\mathfrak{k}}{dt}. \tag{13}$$

Wollte man als Basis ein Linkssystem voraussetzen, eine Vorzeichenänderung der rechten Seite von (9) aber vermeiden, so müßte man in (8) die Vorzeichen der Maßzahlen a_1, a_2, a_3 von $\mathfrak{u}$ ändern.

§ 2. Natürliche Geometrie der Raumkurven.

42. Frenetsche Formeln. Führt man für eine Raumkurve an Stelle eines beliebigen Parameters u die von einem festen Anfangspunkt auf der Kurve gemessene Bogenlänge s ein, so ist der Vektor $\frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ ein Einheitsvektor, weil das Bogenelement ds der Betrag des infinitesimalen Vektors $d\mathfrak{r}$ ist.

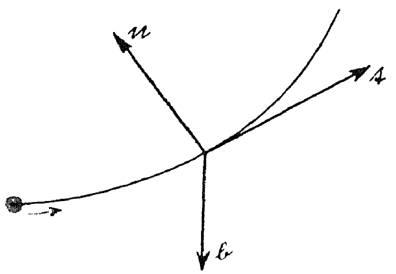


Fig. 30.

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t} \tag{14}$$

hat die Richtung der Kurventangente im Sinne der wachsenden Bogenlänge (Fig. 30).

Man denkt sich mit der Kurve in jedem Punkt ein begleitendes Dreibein verbunden, dessen Beine in folgender Weise festgelegt werden: Das erste Bein soll der Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ sein.

Die Tangentenvektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t} + d\mathfrak{t}$ in zwei benachbarten Kurvenpunkten bestimmen die zum Bogenelement ds gehörige Schmiegungsebene der Kurve. Das zweite Bein soll der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bilden, der die Richtung von $d\mathfrak{t}$ hat. Dieser Hauptnormalenvektor $\mathfrak{n}$ liegt in der Schmiegungsebene, und steht auf $\mathfrak{t}$ senkrecht. Das dritte Bein ist der Binormalenvektor $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{n}$. Das begleitende Dreibein ist damit als Rechtssystem vorausgesetzt.

Das begleitende Dreibein soll sich längs der Kurve fortbewegen, und zwar soll sein Scheitel, der Kurvenpunkt, die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = 1$ haben. Außer der hierdurch bestimmten translatorischen Bewegung führt das Dreibein eine Drehung aus; dabei sind die Tangentialgeschwindigkeiten der Endpunkte von $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$ mit $\frac{d\mathfrak{t}}{ds}, \frac{d\mathfrak{n}}{ds}, \frac{d\mathfrak{b}}{ds}$ zu bezeichnen. Der Vektor (8), der die Drehgeschwindigkeit nach Betrag und Achsenrichtung bestimmt, heißt Darbouxscher Vektor und soll mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{d} = a_1\mathfrak{t} + a_2\mathfrak{n} + a_3\mathfrak{b}. \tag{15}$$

Für das begleitende Dreibein nehmen die Gleichungen (9) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \mathfrak{d} \times \mathfrak{t} = a_3\mathfrak{n} - a_2\mathfrak{b}, \\ \frac{d\mathfrak{n}}{ds} &= \mathfrak{d} \times \mathfrak{n} = -a_3\mathfrak{t} + a_1\mathfrak{b}, \\ \frac{d\mathfrak{b}}{ds} &= \mathfrak{d} \times \mathfrak{b} = a_2\mathfrak{t} - a_1\mathfrak{n} \end{aligned} \tag{16}$$

a_1, a_2, a_3 ergeben sich durch Bildung der skalaren Produkte von der Form (13). Weil $\mathfrak{b}$ auf der Schmiegungsebene, also auf zwei benachbarten Tangenten $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t} + d\mathfrak{t}$ senkrecht steht, ist

$$\mathfrak{b} \cdot \frac{d\mathfrak{t}}{ds} = 0,$$

also

$$a_2 = 0.$$

Damit reduziert sich der Darbouxsche Vektor auf (Fig. 31)

$$\mathfrak{d} = a_1\mathfrak{t} + a_3\mathfrak{b};$$

er ist komplanar zu $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$; die Bewegung der Endpunkte von

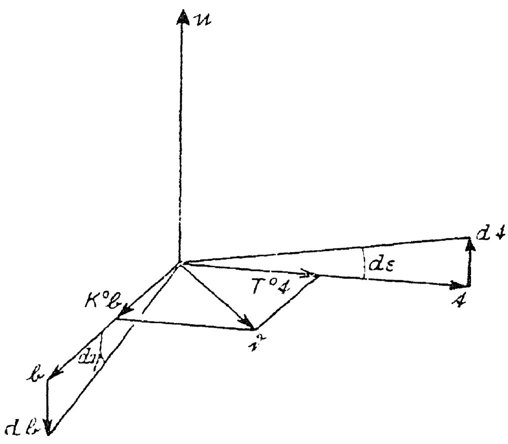


Fig. 31.

$\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ erfolgt normal zur Ebene ($\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$), und zwar sind, der Definition von $\mathfrak{n}$ zufolge, $d\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ gleichsinnig, während $d\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}$ gleichsinnig oder gegensinnig sein können. Also wird

$$a_3 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{n} = \frac{|d\mathfrak{t}|}{ds}; \quad a_1 = -\frac{d\mathfrak{b}}{ds} \cdot \mathfrak{n} = \pm \frac{|d\mathfrak{b}|}{ds}.$$

Geometrisch ist $|d\mathfrak{t}| = d\varepsilon$ der Kontingenzwinkel, d. h. der Winkel der Tangenten, $\pm |d\mathfrak{b}| = d\eta$ der Torsionswinkel, d. h. der Winkel der Binormalen in zwei benachbarten Kurvenpunkten.

Man bezeichnet

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\varrho} = K^0 \text{ als erste Krümmung oder Flexion,}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{\tau} = T^0 \text{ als zweite Krümmung oder Torsion}$$

der Raumkurve; ϱ und τ als ihren Krümmungs- und Torsionsradius. Dabei ist das Vorzeichen der Torsion dann als positiv festgesetzt, wenn $d\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}$ gegensinnig sind, wenn also die Bewegung der Binormalen beim Fortschreiten des Kurvenpunktes in Richtung $\mathfrak{t}$ eine Rechtsschraubung um $\mathfrak{t}$ als Achse ist. Somit wird

$$a_3 = \frac{1}{\varrho} = K^0; \quad a_1 = \frac{1}{\tau} = T^0, \tag{17}$$

also der Darbouxsche Vektor

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{t}}{\tau} + \frac{\mathfrak{b}}{\varrho} = T^0\mathfrak{t} + K^0\mathfrak{b}. \tag{18}$$

Aus (16) ergeben sich die Frenetschen Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}, & \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= K^0\mathfrak{n}; \\ \frac{d\mathfrak{n}}{ds} &= -\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{b}}{\tau}, & \frac{d\mathfrak{n}}{ds} &= -K^0\mathfrak{t} + T^0\mathfrak{b}; \\ \frac{d\mathfrak{b}}{ds} &= -\frac{\mathfrak{n}}{\tau}, & \frac{d\mathfrak{b}}{ds} &= -T^0\mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{19}$$

Gerade so wie $\frac{|d\mathfrak{t}|}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ und $\frac{|d\mathfrak{b}|}{ds} = \pm\frac{1}{\tau}$ als erste und zweite Krümmung einer Raumkurve eingeführt wurden, läßt sich mit Hilfe des Winkels benachbarter Normalen eine dritte Krümmung definieren, die Totalkrümmung $\frac{|d\mathfrak{n}|}{ds} = \frac{1}{\varkappa}$. Die Berechtigung der Bezeichnung Totalkrümmung ergibt sich aus dem Lancretschen Satz:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}, \tag{20}$$

der aus der zweiten Frenetschen Formel folgt, und die dritte Krümmung durch die beiden ersten ausdrückt. Man bemerkt, daß nach (18) $\frac{1}{\varkappa} = |\mathfrak{d}|$ den Betrag des Darbouxschen Vektors gibt.

Wollte man ein Linkssystem $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$ einführen, dabei aber wie bisher die einer Rechtsschraubung entsprechende Torsion als positiv bezeichnen, so hätte man, abweichend von (17)

$$a_1 = -\frac{1}{\tau} = -T^0$$

zu setzen.

43. Formeln für erste Krümmung und Torsion. Um die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und die Torsion $\frac{1}{\tau}$ selbst zu berechnen, denkt man sich den Ortsvektor eines Punktes der Raumkurve als Funktion der Bogenlänge s gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{t}$$

der Tangentenvektor, und

$$\mathfrak{r}'' = \frac{d\mathfrak{t}}{ds};$$

dabei bedeuten die Striche Differentiationen nach s. Dann folgt aus der ersten Frenetschen Formel (19) durch skalare Multiplikation jeder Seite mit sich selbst das Quadrat der ersten Krümmung:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{r}'' \cdot \mathfrak{r}''. \tag{21a}$$

Das Vorzeichen der ersten Krümmung bleibt willkürlich. Die Torsion ergibt sich aus der dritten Frenetschen Formel (19) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$:

$$\frac{1}{\tau} = -\mathfrak{n} \cdot \frac{d\mathfrak{b}}{ds}.$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ durch die höheren Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ auszudrücken; aus der ersten Frenetschen Formel folgt

$$\mathfrak{n} = \varrho\,\mathfrak{r}'';$$

dann ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{n} = \varrho\,\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}''.$$

also

$$\frac{1}{\tau} = -\varrho\,\mathfrak{r}'' \cdot \frac{d}{ds}(\varrho\,\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}'').$$

Bei der Ausführung der Differentiation treten drei gemischte Produkte auf, von denen zwei verschwinden; die Torsion wird

$$\frac{1}{\tau} = \varrho^2 |\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}'''|. \tag{21b}$$

Bezieht man den Ortsvektor auf eine feste Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z,$$

so folgt aus (21a) und (21b) für erste Krümmung und Torsion:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}; \tag{22a}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \tag{22b}$$

Bei der Anwendung der Formeln (21a, b) und (22a, b) für Krümmung und Torsion einer Raumkurve darf man nicht vergessen, daß in diesen Formeln als Parameter die Bogenlänge eingeführt ist. In den meisten praktischen Fällen besteht diese Spezialisierung des Parameters nicht von vornherein; man muß dann entweder, um die Formeln anwenden zu können, durch eine geeignete Substitution die Bogenlänge als Parameter einführen, oder aber die Formeln (21), (22) für einen allgemeinen Parameter umrechnen. Um das in Kürze durchführen zu können, sei wie bisher die Differentiation nach der Bogenlänge s durch einen Strich ($'$), dagegen die nach einem beliebigen Parameter u durch einen Punkt ($\dot{}$) bezeichnet; dann wird

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \frac{d\mathfrak{r}}{du}\frac{du}{ds} = \frac{\dfrac{d\mathfrak{r}}{du}}{\left|\dfrac{d\mathfrak{r}}{du}\right|}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{|\dot{\mathfrak{r}}|} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{\sqrt{\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}}},$$

ferner

$$\mathfrak{r}'' = \frac{\ddot{\mathfrak{r}}}{\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}} - \frac{\dot{\mathfrak{r}}\cdot\ddot{\mathfrak{r}}}{(\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^2}\dot{\mathfrak{r}};$$

endlich

$$\mathfrak{r}''' = \frac{\dddot{\mathfrak{r}}}{\sqrt{(\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^3}} + p\ddot{\mathfrak{r}} + q\dot{\mathfrak{r}},$$

wo die Koeffizienten p und q im folgenden nicht gebraucht werden.

Die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ erhält man nach (21a) aus

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(\ddot{\mathfrak{r}}\cdot\ddot{\mathfrak{r}})(\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}) - (\dot{\mathfrak{r}}\cdot\ddot{\mathfrak{r}})^2}{(\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^3} = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|^2}{(\dot{\mathfrak{r}}\cdot\dot{\mathfrak{r}})^3}; \tag{23a}$$

die Torsion wird nach (21b)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}\,\ddot{\mathfrak{r}}\,\dddot{\mathfrak{r}}|}{|\dot{\mathfrak{r}}\times\ddot{\mathfrak{r}}|^2}. \tag{23b}$$

Die Umrechnung in Koordinaten ist jetzt sehr einfach und bleibe dem Leser überlassen.

44. Die rektifizierende Fläche. Die Frenetschen Formeln beherrschen die ganze Theorie der Raumkurven. Um ein Beispiel für die Verwendbarkeit der Frenetschen Formeln zu geben, soll die durch Tangente und Binormale einer Raumkurve

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(s)$$

bestimmte Ebene, ihre rektifizierende Ebene, aufgestellt, und deren Hüllfläche, die rektifizierende Fläche, untersucht werden.

Ist $\mathfrak{X}$ der Ortsvektor eines Punktes der rektifizierenden Ebene, so ist

$$(\mathfrak{X} - \mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{n} = 0 \tag{24a}$$

ihre Gleichung. Um die Hüllfläche der rektifizierenden Ebene zu bestimmen, hat man zu der Gleichung (24a) noch die Gleichung hinzuzunehmen, die aus ihr durch Differentiation nach dem Parameter s entsteht:

$$(\mathfrak{X} - \mathfrak{r}) \cdot \frac{d\mathfrak{n}}{ds} - \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \mathfrak{n} = 0;$$

sie wird unter Benützung der Frenetschen Formeln

$$(\mathfrak{X} - \mathfrak{r}) \cdot \left(-\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{b}}{\tau}\right) = 0. \tag{24b}$$

Die Gleichungen (24a, b) bestimmen für jeden Wert des Parameters s eine Erzeugende der Hüllfläche, eine rektifizierende Gerade; ein Vektor $(\mathfrak{X} - \mathfrak{r})$, der einer rektifizierenden Geraden angehört, steht nach (24a, b) senkrecht auf $\mathfrak{n}$ und auf $\left(-\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{b}}{\tau}\right)$, hat also die Richtung von [vgl. (18)]

$$\mathfrak{n} \times \left(-\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{b}}{\tau}\right) = \frac{\mathfrak{b}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{t}}{\tau} = \mathfrak{d}.$$

Der Darbouxsche Vektor einer Raumkurve bestimmt also in jedem Punkt die Richtung der Erzeugenden derjenigen abwickelbaren Fläche, die von den rektifizierenden Ebenen umhüllt wird, der rektifizierenden Fläche.

Die rektifizierende Fläche verdankt ihren Namen der Eigenschaft, daß bei ihrer Abwicklung in eine Ebene die auf ihr liegende Raumkurve in eine Gerade ausgestreckt wird.

Um das zu beweisen, berechnen wir den Winkel $d\varepsilon$ zweier benachbarter Darbouxscher Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d} + d\mathfrak{d}$. Hierzu zerlegen wir zunächst den Vektor

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{t}}{\tau} + \frac{\mathfrak{b}}{\varrho}$$

in das Produkt aus Betrag $|\mathfrak{d}|$ und Einheitsvektor $\mathfrak{e}$:

$$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|\,\mathfrak{e} = |\mathfrak{d}|\,(\mathfrak{t}\cos\alpha + \mathfrak{b}\sin\alpha),$$

wo α den Winkel bezeichnet, den $\mathfrak{d}$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ bildet (Fig. 32a, b); hier ist [nach (18), (20)]

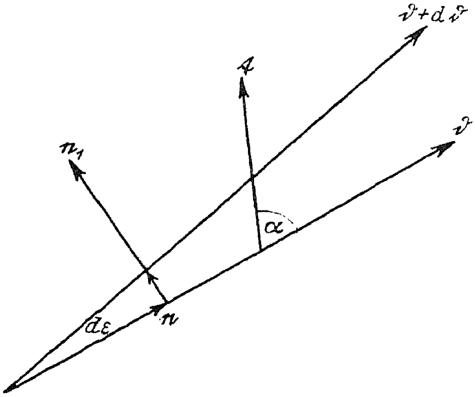


Fig. 32a.

$$|\mathfrak{d}| = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{1}{\varkappa};$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{\tau}}{|\mathfrak{d}|} = \frac{\varkappa}{\tau}; \quad \sin\alpha = \frac{\frac{1}{\varrho}}{|\mathfrak{d}|} = \frac{\varkappa}{\varrho}. \tag{25}$$

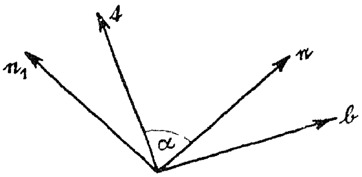


Fig. 32b.

Der Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{d}$ wird also

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{t}\cos\alpha + \mathfrak{b}\sin\alpha. \tag{26}$$

Bildet man nun das Differential $d\mathfrak{e}$ benachbarter Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e} + d\mathfrak{e}$, so ergibt sich nach (6')

$$d\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1\,d\varepsilon, \tag{27}$$

wo $d\varepsilon$ der gesuchte Winkel ist, $\mathfrak{e}_1$ ein auf $\mathfrak{e}$ senkrechter Einheitsvektor, der sich aus der Figur 32b ablesen läßt:

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{t}\sin\alpha - \mathfrak{b}\cos\alpha;$$

er wird sich sofort auch durch Rechnung ergeben, zusammen mit $d\varepsilon$: Nach (26) ist

$$d\mathfrak{e} = d\mathfrak{t}\cos\alpha + d\mathfrak{b}\sin\alpha - (\mathfrak{t}\sin\alpha - \mathfrak{b}\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Nach den Frenetschen Formeln (19) und (25) wird

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cos\alpha + \frac{d\mathfrak{b}}{ds}\sin\alpha = \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}\cos\alpha - \frac{\mathfrak{n}}{\tau}\sin\alpha = 0;$$

mithin

$$d\mathfrak{e} = -\mathfrak{e}_1\,d\alpha.$$

Der Vergleich dieser Formel mit (27) ergibt

$$d\varepsilon = -d\alpha. \tag{28}$$

Damit ist der gesuchte Winkel berechnet.

Um das Resultat geometrisch zu deuten, denkt man sich die rektifizierende Fläche in eine Ebene abgewickelt; gilt dann der zu beweisende Satz, daß die Raumkurve in eine Gerade ausgestreckt wird, so müssen jedenfalls zwei benachbarte Tangentenvektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t} + d\mathfrak{t}$ zusammen in diese Gerade fallen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß α Außenwinkel eines Dreiecks ist, in dem die gegenüberliegenden Winkel $\alpha + d\alpha$ und $d\varepsilon$ sind (Fig. 33). Es muß also

$$\alpha = \alpha + d\alpha + d\varepsilon$$

oder

$$d\varepsilon = -d\alpha$$

sein. Das ist gerade die errechnete Bedingung (28), womit der Satz bewiesen ist.

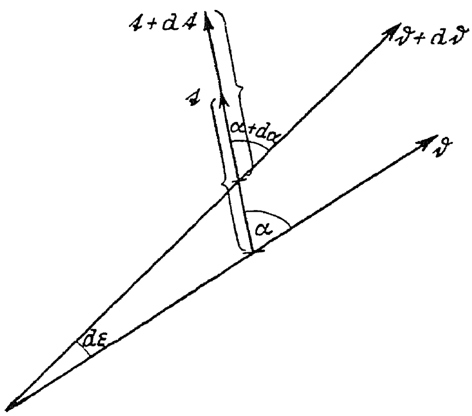


Fig. 33.

§ 3. Natürliche Geometrie der Kurven auf einer Fläche.

45. Begleitendes Dreibein einer Kurve auf einer Fläche[1]**.** Einer auf einer Fläche F gelegenen Kurve C kann man ein begleitendes Dreibein in der Weise zuordnen, daß in jedem Punkt das erste Bein ein Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ in Richtung der Tangente von C im Sinn der wachsenden Parameterwerte ist, das zweite Bein ein Einheitsvektor $\bar{\mathfrak{t}}$ senkrecht auf $\mathfrak{t}$ in der Tangentialebene, das dritte Bein ein Einheitsvektor $\mathfrak{N}$ in Richtung der Flächennormalen in dem Sinne, daß $\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{N}$ ein Rechtssystem bilden, also $\mathfrak{N} = \mathfrak{t} \times \bar{\mathfrak{t}}$ ist.

Beim Übergang zu einem Nachbarpunkt führt das begleitende Dreibein, abgesehen von einer Translation, eine Drehung aus, die bei Verwendung der Bogenlänge s als Parameter nach (9) durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{t} = \quad * \qquad a_3\bar{\mathfrak{t}} - a_2\mathfrak{N},\\
\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \bar{\mathfrak{t}} = -a_3\mathfrak{t} \quad * \quad + a_1\mathfrak{N},\\
\frac{d\mathfrak{N}}{ds} &= \mathfrak{u} \times \mathfrak{N} = a_2\mathfrak{t} - a_1\bar{\mathfrak{t}} \qquad *
\end{aligned} \tag{29}$$

gegeben werden kann, wenn der die Drehung vermittelnde Vektor

---

1) Bei Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, spielt das «trièdre mobile» eine fundamentale Rolle.

in der Form

$$\mathfrak{u} = a_1 \mathfrak{t} + a_2 \bar{\mathfrak{t}} + a_3 \mathfrak{N} \tag{30}$$

angesetzt wird. Den Maßzahlen a_1, a_2, a_3 kann ein geometrischer Sinn beigelegt werden. Es ist nach (29)

$$a_2 = -\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{N}; \quad a_3 = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\bar{\mathfrak{t}};$$

a_2 ist die Krümmung der Projektion von C in die Ebene $(\mathfrak{t}, \mathfrak{N})$, den Normalschnitt der Fläche durch $\mathfrak{t}$, und wird Normalkrümmung $\boldsymbol{N}$ genannt; die Vorzeichenfestsetzung ist durch einen Zweckmäßigkeitsgrund bedingt (Ziff. 50). a_3 ist die Krümmung der Projektion von C in die Tangentialebene $(\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}})$ und wird geodätische Krümmung $\boldsymbol{G}$ genannt. Führt man noch die Hauptnormale $\mathfrak{n}$ der Kurve C ein, so ist nach der ersten Frenetschen Formel (19) $\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}$; also wird

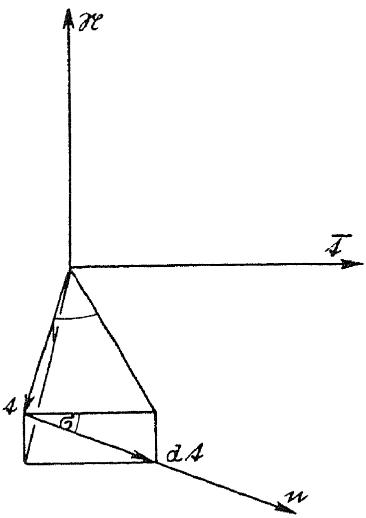


Fig. 34.

$$a_2 = \boldsymbol{N} = \frac{d\mathfrak{N}}{ds}\cdot\mathfrak{t} = -\frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\mathfrak{N} = -\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}}{\varrho};$$

$$a_3 = \boldsymbol{G} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\bar{\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{n}\cdot\bar{\mathfrak{t}}}{\varrho}: \tag{31}$$

wird der Winkel der Schmiegungsebene von C mit der Tangentialebene σ genannt (Fig. 34), so wird

$$\boldsymbol{N} = \frac{\sin\sigma}{\varrho}, \quad \boldsymbol{G} = \frac{\cos\sigma}{\varrho}. \tag{32}$$

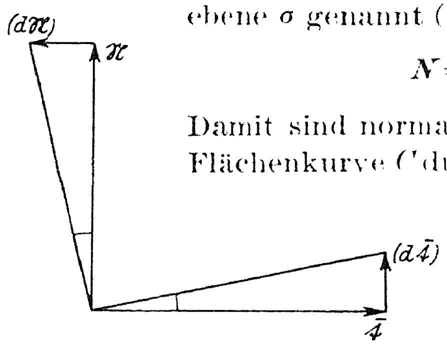


Fig. 35.

Damit sind normale und geodätische Krümmung der Flächenkurve C durch den Radius ϱ ihrer ersten Krümmung (Flexion) und die Lage der Schmiegungsebene bestimmt. Die erste der beiden Gleichungen (32) gibt einen Zusammenhang zwischen der Krümmung eines Normalschnittes und eines dagegen um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \sigma$ geneigten Schnittes und wird als Meusnierscher Satz bezeichnet.

a_2 und a_3, die jetzt geometrisch gedeutet sind, bestimmen zusammen die Komponente des Drehvektors $\mathfrak{u}$, die auf $\mathfrak{t}$ senkrecht

steht, und mithin die Lageänderung von $\mathfrak{t}$ selbst gibt. Es fehlt noch die in Richtung von $\bar{\mathfrak{t}}$ selbst fallende Komponente $a_1 \mathfrak{t}$, die die Drehung des Dreibeins um $\mathfrak{t}$ beim Fortschreiten seines Scheitels längs $\mathfrak{t}$ bestimmt. Fig. 35 zeigt die bei dieser Komponente der Drehung eintretenden Änderungen $(d\bar{\mathfrak{t}})$ von $\bar{\mathfrak{t}}$ und $(d\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$. Um a_1 geometrisch zu deuten, entnimmt man a_1 aus (29) und setzt

$$a_1 = -\frac{d\mathfrak{N}}{ds}\cdot\bar{\mathfrak{t}} = \frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds}\cdot\mathfrak{N} = \left[\mathfrak{N}\,\frac{d\mathfrak{N}}{ds}\,\mathfrak{t}\right] = \boldsymbol{T}. \tag{33}$$

$\boldsymbol{T}$ heißt geodätische Torsion der Kurve C auf F; sie ist der auf die Bogenlänge Eins bezogene Drehwinkel um $\mathfrak{t}$ als Achse.

Mit der gewöhnlichen Torsion $\frac{1}{\tau}$ hängt die geodätische Torsion $\boldsymbol{T}$ der Flächenkurve einfach zusammen. Aus den Frenetschen Formeln folgt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\mathfrak{n}}{ds}\cdot\mathfrak{b};$$

entnimmt man zur Berechnung dieses skalaren Produkts aus der Figur 34:

$$\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{t}}\cos\sigma - \mathfrak{N}\sin\sigma,$$

also

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\times\mathfrak{n} = \mathfrak{N}\cos\sigma + \bar{\mathfrak{t}}\sin\sigma$$

und bildet $\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$ unter Bezugnahme auf (29):

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = (-a_3\mathfrak{t} + a_1\mathfrak{N})\cos\sigma - (a_2\mathfrak{t} - a_1\bar{\mathfrak{t}})\sin\sigma - (\bar{\mathfrak{t}}\sin\sigma + \mathfrak{N}\cos\sigma)\frac{d\sigma}{ds},$$

so erhält man

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds}\cdot\mathfrak{b} = a_1 - \frac{d\sigma}{ds},$$

oder nach (33)

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\sigma}{ds}; \tag{34}$$

eine Gleichung, deren geometrischer Sinn klar ist: Die Drehung der Tangentialebene setzt sich additiv zusammen aus der Drehung der Schmiegungsebene und der Änderung des Winkels zwischen beiden Ebenen.

Die Gleichungen (29) und (30), die die Bewegung des begleitenden Dreibeins bestimmen, nehmen folgende endgültige Form an:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \mathfrak{u}\times\mathfrak{t} = \quad * \quad \boldsymbol{G}\bar{\mathfrak{t}} - \boldsymbol{N}\mathfrak{N};\\ \frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds} &= \mathfrak{u}\times\bar{\mathfrak{t}} = -\boldsymbol{G}\mathfrak{t} \quad * \quad + \boldsymbol{T}\mathfrak{N};\\ \frac{d\mathfrak{N}}{ds} &= \mathfrak{u}\times\mathfrak{N} = \boldsymbol{N}\mathfrak{t} - \boldsymbol{T}\bar{\mathfrak{t}} \quad * \end{aligned} \tag{35}$$

$$\mathfrak{u} = \boldsymbol{T}\mathfrak{t} + \boldsymbol{N}\bar{\mathfrak{t}} + \boldsymbol{G}\mathfrak{N}. \tag{36}$$

Für die Bewegung eines mit dem Dreibein starr verbundenen Vektors $\mathfrak{v}$ (mit konstanten Maßzahlen in bezug auf die Basis $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{N}$) gilt nach (35)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}.$$

Der Vergleich der Formeln (31) und (33) läßt einen bemerkenswerten Unterschied der 3 Krümmungen einer Flächenkurve

$$N = \frac{d\mathfrak{N}}{ds} \cdot \mathfrak{t}; \quad G = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \bar{\mathfrak{t}}; \quad T = \frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds} \cdot \mathfrak{N} \tag{37}$$

erkennen. Die Wahl der positiven Richtung $\mathfrak{N}$ der Flächennormalen ist willkürlich und kann im allgemeinen nur in begrenzten Gebieten eindeutig durchgeführt werden; mit der Umkehrung der Normalenrichtung kehrt sich auch die Richtung $\bar{\mathfrak{t}}$ um, wenn nach wie vor $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem bilden sollen. Es sind also die Normalkrümmung N und geodätische Krümmung G nur bis auf das Vorzeichen, die geodätische Torsion T aber eindeutig bestimmt.

Anderseits ändern G und T ihre Vorzeichen, wenn man ohne die Richtung von $\mathfrak{N}$ zu ändern, die Richtung von $\bar{\mathfrak{t}}$ umkehrt, also von einem Rechts- zu einem Linkssystem übergeht. Das ist für G, das die Abweichung einer Kurve der Ebene $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$ von der Geraden $\mathfrak{t}$ in der Lotrichtung $\bar{\mathfrak{t}}$ mißt, geometrisch klar. Für T jedoch, das das eindeutig bestimmte Maß einer Schraubung ist, ist der Vorzeichenwechsel eine Folge des Umstands, daß jede Schraubung in einem Linkssystem mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheint wie in einem Rechtssystem; dieser Vorzeichenwechsel ist dadurch aufzuheben, daß man, wie das auch bei den Frenetschen Formeln geschehen ist, das Vorzeichen der Torsion bei Linkssystemen anders festsetzt als bei Rechtssystemen, daß man also, von (33) abweichend

$$\frac{d\mathfrak{N}}{ds} \cdot \bar{\mathfrak{t}} = -\frac{d\mathfrak{t}}{ds} \cdot \mathfrak{N} = T$$

setzt.

In den Gleichungen (35) und (36) treten nur geometrisch definierte Größen auf ohne Verwendung eines willkürlichen Bezugssystems. Man bezeichnet diese Art der Behandlung der Geometrie als natürliche Geometrie. Die Gleichungen (35) (36) beherrschen die ganze Geometrie einer Flächenkurve; für die Geometrie der Fläche selbst reichen sie nur aus zu Untersuchungen in der Umgebung der Kurve.

46. Geodätische Linien. Wir wollen die Variation der Bogenlänge einer Flächenkurve C untersuchen, d. h. die Änderung, die die

Bogenlänge erleidet, wenn die Kurvenpunkte eine kleine Verschiebung senkrecht zur Kurve in der Fläche erfahren[1]); Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Kurvenbogens denken wir festgehalten.

Ein gerichtetes Linienelement $d\mathfrak{s}$ von C gehe in $d\mathfrak{s}'$ über; es möge sich dabei um die Variation $\delta d\mathfrak{s}$ ändern, so daß (Fig. 36)

$$d\mathfrak{s}' = d\mathfrak{s} + \delta d\mathfrak{s}$$

ist. Dann ist die Bogenlänge der ursprünglichen Kurve C

$$s = \int |d\mathfrak{s}| = \int \sqrt{d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}};$$

die Bogenlänge der variierten Kurve

$$s' = \int |d\mathfrak{s}'| = \int \sqrt{(d\mathfrak{s} + \delta d\mathfrak{s}) \cdot (d\mathfrak{s} + \delta d\mathfrak{s})};$$

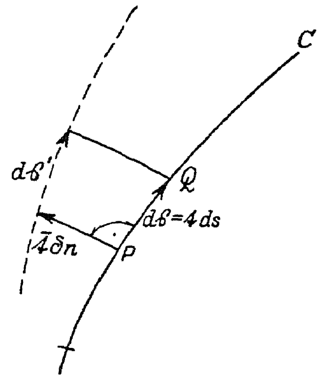


Fig. 36.

beide Integrale sind ebenso wie alle folgenden zwischen zwei festgehaltenen Punkten der Kurve C gedacht.

Unter Vernachlässigung von Gliedern 2. und höherer Ordnung in $\delta d\mathfrak{s}$ erhält man durch Bildung des skalaren Produkts unter der Wurzel, dann durch Anwendung des binomischen Satzes

$$\begin{aligned} s' &= \int \sqrt{d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s} + 2 d\mathfrak{s} \cdot \delta d\mathfrak{s}} \\ &= \int \sqrt{d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}} + \int \frac{d\mathfrak{s} \cdot \delta d\mathfrak{s}}{\sqrt{d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}}} = s + \int \mathfrak{t} \cdot \delta d\mathfrak{s}. \end{aligned}$$

Mithin ist die *Variation der Bogenlänge* s von C

$$\delta s = \int \mathfrak{t} \cdot \delta d\mathfrak{s}; \tag{38}$$

dieser Ausdruck ist jetzt zu berechnen.

Hierzu sei die Verschiebung eines Punktes P von C mit $\bar{\mathfrak{t}}\delta n$ bezeichnet, wo $\bar{\mathfrak{t}}$ die Richtung, δn die Maßzahl dieser Verschiebung gibt. δn ist ebenso wie $\bar{\mathfrak{t}}$ eine Funktion von s. Der Endpunkt Q eines von P ausgehenden Linienelements $d\mathfrak{s}$ von C wird also um $\bar{\mathfrak{t}}\delta n + d(\bar{\mathfrak{t}}\delta n)$ verschoben, wo das Zeichen d die Bildung eines Differentials verlangt, das der Änderung von s um ds entspricht. Mithin geht das Linienelement $d\mathfrak{s}$ über in $d\mathfrak{s} + d(\bar{\mathfrak{t}}\delta n)$; seine Variation ist

$$\delta d\mathfrak{s} = d(\bar{\mathfrak{t}}\delta n) = d\bar{\mathfrak{t}}\delta n + \bar{\mathfrak{t}} d\delta n.$$

Somit wird nach (38) die Variation der Bogenlänge, wenn man die Beziehung $\mathfrak{t} \cdot \bar{\mathfrak{t}} = 0$ berücksichtigt:

$$\delta s = \int \mathfrak{t} \cdot d\bar{\mathfrak{t}}\delta n = \int \mathfrak{t} \cdot \frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{ds} \delta n\, ds,$$

1) Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie I (1921), S. 89.

oder nach (37)

$$\delta s = -\int G\,\delta n\,ds.$$

Die geodätische Krümmung G einer Flächenkurve ist für die Variation der Bogenlänge bei vorgegebener Verschiebung δn der Kurvenpunkte in derselben Weise maßgebend wie bei ebenen Kurven die gewöhnliche Krümmung; im Hinblick auf die geometrische Definition der geodätischen Krümmung ist das nicht überraschend.

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Linien, für die die Variation der Bogenlänge für jede mögliche Verschiebung δn verschwindet, die Bogenlänge selbst also ein Extremum, im allgemeinen ein Minimum wird beim Vergleich mit allen benachbarten Kurven. Diese „kürzesten" Linien heißen geodätische Linien. Wegen des Verschwindens von δs für jedes δn muß $G = 0$ sein; und da hieraus umgekehrt wieder das Verschwinden von δs folgt, ist diese Bedingung charakteristisch. Die geodätischen Linien sind die Kurven mit der geodätischen Krümmung Null.

Nach (32) ist für geodätische Linien $\cos\sigma = 0$, also $\sigma = \pm \frac{\pi}{2}$. Die Hauptnormale fällt also mit der Flächennormalen zusammen, infolgedessen auch die rektifizierende Ebene mit der Tangentialebene der Fläche. Die von den Tangentialebenen in den Punkten einer geodätischen Linie gebildete abwickelbare Fläche ist ihre rektifizierende Fläche, durch deren Abwicklung die geodätische Linie in eine Gerade ausgestreckt wird. Weiter wird nach (32) und (34)

$$N = \pm \frac{1}{\varrho}; \quad T = \frac{1}{\tau}.$$

Normalkrümmung und geodätische Torsion einer geodätischen Linie fallen mit der gewöhnlichen ersten Krümmung und Torsion zusammen.

Dem Versuch, die natürliche Geometrie der Flächenkurven und ihrer Umgebung zu einer natürlichen Geometrie der Flächen zu erweitern, stehen Schwierigkeiten entgegen, die es angezeigt erscheinen lassen, zuerst eine andere Methode zur Behandlung der Geometrie der Flächen kennen zu lernen, die sich eines willkürlichen Bezugssystems bedient, und dann erst zur natürlichen Geometrie zurückzukehren.

§ 4. Gaußsche Parameter auf einer Fläche.

47. Einführung Gaußscher Parameter; Parameterkurven. Um einen Punkt P auf einer Fläche festzulegen, bedient man sich nach dem Vorgang von Gauß zweier Parameter u, v und macht die (rechtwinkligen oder allgemeinen) räumlichen Koordinaten des Punktes P, bzw. seinen Ortsvektor, von ihnen abhängig. Z. B.:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v); \\ y &= y(u, v); \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v). \\ z &= z(u, v); \end{aligned} \tag{40}$$

Jedem Wertepaar u, v entspricht dann ein Flächenpunkt; die Zuordnung ist bei entsprechender Abgrenzung des betrachteten Gebietes eindeutig.

Die beiden Kurvenscharen $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ werden als u-Kurven, bzw. v-Kurven auf der Fläche bezeichnet; diese Gaußschen Parameterkurven bilden ein die Fläche überdeckendes Netz, ein Koordinatensystem auf der Fläche (Fig. 37).

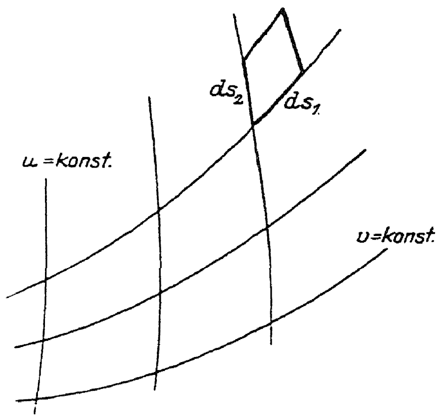


Fig. 37.

Es ist hier nicht beabsichtigt, auf diesem viel begangenen Weg in die Flächentheorie tiefer einzudringen als notwendig ist, um die Methode zu zeigen und um die Grundlagen für spätere allgemeinere Untersuchungen zu schaffen; außerdem soll der Zusammenhang dieser Gaußschen Methode mit der in den vorhergehenden Ziffern verwendeten und bald (§ 5) wieder aufzunehmenden Methode der natürlichen Geometrie klargestellt werden. (Für diesen letzteren Zweck genügt allenfalls die Kenntnis des nächsten Abschnitts [Ziff. 48].)

48. Metrische Fundamentalform. Durch partielle Differentiation des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ nach u bzw. v erhält man nun Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v}$, die die Richtung der Tangenten der u- bzw. v-Kurve im Punkt P haben.

Der infinitesimale Unterschied $d\mathfrak{r}$ des Ortsvektors zweier benachbarter Kurvenpunkte P und P' ist ein infinitesimaler, in der Fläche gelegener Vektor; er wird als gerichtetes Linienelement

bezeichnet und $d\mathfrak{s}$ genannt. In Abhängigkeit von den Gaußschen Parametern u, v in P und $u + du$, $v + dv$ in P' wird

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v} dv = \mathfrak{r}_u du + \mathfrak{r}_v dv. \tag{41}$$

Als (skalares) Linienelement-Quadrat der Fläche wird

$$ds^2 = d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u du^2 + 2\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v du dv + \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_v dv^2 \tag{42a}$$

eingeführt und kürzer

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{42b}$$

geschrieben. ds^2 ist eine definite quadratische Differentialform, die als erste Fundamentalform, auch metrische Fundamentalform der Fläche bezeichnet wird.

Die Maßzahlen der metrischen Fundamentalform (erste Fundamentalgrößen) sind

$$E = \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u, \quad F = \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v, \quad G = \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_v; \tag{43}$$

ihre Diskriminante ist

$$EG - F^2 = (\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u)(\mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_v) - (\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v)^2 = |\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v|^2 > 0. \tag{43'}$$

In Richtung der Parameterkurven wird das gerichtete Linienelement

$$d_1 \mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} du; \quad d_2 \mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v} dv, \tag{44a}$$

wenn die zu den u-Kurven gehörigen Größen durch den Index 1, die zu den v-Kurven gehörigen durch 2 bezeichnet werden. Der Betrag des Linienelements der beiden Scharen von Parameterkurven ist

$$ds_1 = \sqrt{E} du; \quad ds_2 = \sqrt{G} dv. \tag{44b}$$

Diese Gleichungen lassen die geometrische Bedeutung der Größen E und G erkennen[1]).

Der Winkel ω der Parameterkurven hängt außer von E und G noch von F ab; er ergibt sich aus

$$\cos \omega = \frac{d_1 \mathfrak{s} \cdot d_2 \mathfrak{s}}{ds_1 \, ds_2} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{45}$$

Wenn F überall Null ist, bilden die Parameterkurven ein Orthogonalsystem.

Der Winkel ϑ zweier von P ausgehender Linienelemente, die mit

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_u du + \mathfrak{r}_v dv,$$
$$\delta\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_u \delta u + \mathfrak{r}_v \delta v$$

1) Man beachte den Unterschied in der Bezeichnung $d_1\mathfrak{s}$ und ds_1. Unter $d_1\mathfrak{s}$ ist das in Richtung der Kurven (1) gebildete Differential eines Vektors zu verstehen; ds_1 ist der Betrag des Linienelements ds längs der Kurven (1).

bezeichnet werden sollen, ergibt sich aus

$$\cos\vartheta = \frac{d\mathfrak{s}\cdot\delta\mathfrak{s}}{ds\,\delta s} = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}. \tag{45'}$$

Der Winkel ist ebenso wie das Linienelement durch die Maßzahlen der ersten Fundamentalform bestimmt, die somit für die Metrik in der Fläche maßgebend ist.

Der Flächeninhalt eines infinitesimalen Parallelogramms, das von Parameterkurven u, $u+du$, v, $v+dv$ begrenzt wird, ist

$$dF = ds\,\delta s \sin\omega,$$

oder nach (44) (45)

$$dF = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{46}$$

Etwas allgemeiner erhält man für den Flächeninhalt eines durch zwei von P ausgehende Linienelemente $d\mathfrak{s}$ und $\delta\mathfrak{s}$ bestimmten Parallelogramms

$$dF = \sqrt{EG-F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u). \tag{46a}$$

Berechnet man nämlich das Parallelogramm zuerst als Plangröße $d\mathfrak{F}$, so ergibt sich

$$d\mathfrak{F} = d\mathfrak{s}\times\delta\mathfrak{s} = (\mathfrak{r}_u\times\mathfrak{r}_v)(du\,\delta v - dv\,\delta u) \tag{46b}$$

und hieraus nach (43′) sofort der Flächeninhalt dF als Betrag von $d\mathfrak{F}$.

Die erste Fundamentalform ist hinreichend für den Aufbau der Geometrie in der Fläche, wenn diese als selbständiges zweidimensionales Gebilde betrachtet wird.

Von der Gestalt der Fläche im Raum und den möglichen Änderungen dieser Gestalt durch Verbiegungen, d. h. solche Deformationen, bei denen der infinitesimale Abstand benachbarter Punkte ungeändert bleibt, wird bei dieser Auffassung vollständig abgesehen. Die metrische Fundamentalform $ds^2 = d\mathfrak{s}\cdot d\mathfrak{s}$ ist nicht nur eine skalare Invariante des gerichteten Linienelements und als solche vom Koordinatensystem im Raum und auf der Fläche unabhängig, sondern sie bleibt auch bei Verbiegungen ungeändert, sie ist biegungsinvariant.

Biegungsinvariant sind auch die Minimalkurven der Fläche, die durch das Verschwinden der metrischen Fundamentalform charakterisiert sind:

$$d\mathfrak{s}\cdot d\mathfrak{s} = 0$$

oder

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0 \tag{47}$$

und die geodätischen Linien als diejenigen Kurven auf der Fläche, für welche die Bogenlänge zwischen zwei Flächenpunkten einen extremen Wert besitzt. (Vgl. Ziff. 46.)

49. Geodätische Krümmung. Die geodätische Krümmung (37)

$$G = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\cdot\bar{\mathfrak{t}} \tag{48}$$

läßt sich wenigstens für die Parameterkurven leicht berechnen, wenn diese ein Orthogonalsystem bilden, also $\mathfrak{r}_u\cdot\mathfrak{r}_v = F = 0$ ist.

Für die u-Kurven (v = konst.) soll die geodätische Krümmung mit G_1, das Linienelement mit ds_1 bezeichnet werden; entsprechend für die v-Kurven mit G_2 bzw. ds_2.

Zunächst soll für die Berechnung von G_1 $\mathfrak{t}$ der Tangentenvektor einer u-Kurve in Richtung des wachsenden Parameters u und $\bar{\mathfrak{t}}$ der Tangentenvektor einer v-Kurve in Richtung des wachsenden Parameters v sein. Dann ist:

$$\mathfrak{t} = \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u} = \frac{\mathfrak{r}_u}{\sqrt{E}};$$

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{r}_u}{\sqrt{E}} = \frac{\mathfrak{r}_{uu}}{E} - \frac{1}{2}\frac{E_u}{E^2}\mathfrak{r}_u;$$

$$\bar{\mathfrak{t}} = \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial s_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial v} = \frac{\mathfrak{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

Somit wird nach (48)

$$G_1 = \frac{\mathfrak{r}_{uu}\cdot\mathfrak{r}_v}{E\sqrt{G}}, \tag{49}$$

wenn man bemerkt, daß

$$\mathfrak{r}_u\cdot\mathfrak{r}_v = F = 0$$

ist. Um $\mathfrak{r}_{uu}\cdot\mathfrak{r}_v$ zu berechnen, bildet man aus der letzten Gleichung und aus $\mathfrak{r}_u\cdot\mathfrak{r}_u = E$ durch Differentiieren:

$$\mathfrak{r}_{uu}\cdot\mathfrak{r}_v + \mathfrak{r}_u\cdot\mathfrak{r}_{uv} = F_u = 0,$$

$$\mathfrak{r}_u\cdot\mathfrak{r}_{uv} = \frac{1}{2}E_v,$$

mithin

$$\mathfrak{r}_{uu}\cdot\mathfrak{r}_v = -\frac{1}{2}E_v.$$

Dann wird

$$G_1 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{E\sqrt{G}}$$

oder

$$G_1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\partial \lg\sqrt{E}}{\partial s_2}. \tag{50a}$$

Für die Berechnung von G_2 soll jetzt $\mathfrak{t}$ der Tangentenvektor einer v-Kurve in Richtung des wachsenden v, $\bar{\mathfrak{t}}$ der Tangentenvektor einer u-Kurve in Richtung des wachsenden u sein. Dann ist

$$G_2 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial s_1}. \tag{50b}$$

Die Beschränkung der Berechnung von G auf die Parameterlinien ist nicht sachlicher, sondern rechnerischer Art und kann durch eine Transformation der Parameter beseitigt werden. Mit solchen Transformationen haben wir uns später zu beschäftigen. Bei den getroffenen Festsetzungen wird es zunächst auffallen, daß beim Übergang von den u- zu den v-Kurven die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ vertauscht sind; die Formel (50b) ist also aus (50a) nicht durch eine Drehung des Koordinaten-Systems ableitbar. Das ist auch gar nicht wünschenswert. Man erkennt aus (50a, b), daß die geodätische Krümmung einer Flächenkurve nur von der metrischen Fundamentalform abhängt, also biegungsinvariant ist. Mithin muß es möglich sein, die geodätische Krümmung ohne Verwendung der Normalenrichtung eindeutig zu definieren; die Festsetzung eines Drehsinns auf der Fläche wäre aber gleichbedeutend mit der Festsetzung einer positiven Normalen. Den getroffenen Festsetzungen liegt vielmehr folgende allgemeine Festsetzung zugrunde: Ist $\psi(u, v) = \text{const}$ die Gleichung der Kurvenschar, für die die geodätische Krümmung zu berechnen ist, so soll der Vektor $\bar{\mathfrak{t}}$ in (48) senkrecht zu einer Kurve $\psi = \text{const}$ im Sinn des wachsenden Parameterwertes ψ gerichtet sein.

50. Zweite Fundamentalform. Um die möglichen Gestalten einer durch ihre metrische Fundamentalform gegebenen Fläche zu bestimmen, hat man die (hier nicht weiter zu verfolgende) Aufgabe zu lösen, diejenigen Ortsvektoren $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(u, v)$ zu bestimmen, für die das skalare Produkt ihrer infinitesimalen Änderung mit sich selbst der gegebenen metrischen Fundamentalform gleich ist:

$$d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r} = ds^2.$$

Ist ein Ortsvektor gefunden, der dieser Bedingung genügt, so ist die durch ihn bestimmte Gestalt der Fläche ein Objekt der Geometrie des Raumes. Die von einem Punkt P der Fläche ausgehenden infinitesimalen Ortsvektoren

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_u\,du + \mathfrak{r}_v\,dv$$

sind komplanar für sämtliche Maßzahlen du, dv und bestimmen die Tangentialebene der Fläche in P. Der Einheitsvektor

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{|\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v|} = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{51}$$

bestimmt die Normale in P nach Richtung und Richtungssinn; er ist geometrisch invariant, also vom Gaußschen Koordinaten-System unabhängig.

Bildet man den infinitesimalen Unterschied $d\mathfrak{N}$ des Normalen-Einheitsvektors $\mathfrak{N}$ in den benachbarten Punkten P und P', und sodann das skalare Produkt $d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N}$, so gelangt man zu einer quadratischen Differentialform, die vom Koordinaten-System unabhängig, aber nur für die vorliegende Gestalt der Fläche invariant, und nicht biegungsinvariant ist. Es ist gebräuchlich, das negative skalare Produkt (52a)

$$\varphi = -d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N} = -[\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_u du^2 + (\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_v + \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_u) du dv + \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_v dv^2]$$

als zweite Fundamentalform einzuführen und kürzer

$$\varphi = -d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N} = D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2 \tag{52b}$$

zu schreiben.

Um die zweiten Fundamentalgrößen D, D', D'' zu berechnen, setzt man am besten φ in eine andere Form. Aus der Gleichung

$$d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{N} = 0$$

oder

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N} = 0; \quad \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N} = 0, \tag{53}$$

die aus (51) folgt und das Senkrechtstehen der Normale auf der Tangentialebene zum Ausdruck bringt, folgt durch Differentiieren

$$d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N} + d^2\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{N} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_u + \mathfrak{r}_{uu} \cdot \mathfrak{N} &= 0, \\ \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_v + \mathfrak{r}_{uv} \cdot \mathfrak{N} &= 0, \\ \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_u + \mathfrak{r}_{uv} \cdot \mathfrak{N} &= 0, \\ \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_v + \mathfrak{r}_{vv} \cdot \mathfrak{N} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist nach (52a) die zweite Fundamentalform

$$\varphi = d^2\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{r}_{uu} \cdot \mathfrak{N} du^2 + 2 \mathfrak{r}_{uv} \cdot \mathfrak{N} du dv + \mathfrak{r}_{vv} \cdot \mathfrak{N} dv^2$$

und die zweiten Fundamentalgrößen sind

$$\begin{aligned} D &= -\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_u = \mathfrak{r}_{uu} \cdot \mathfrak{N}, \\ D' &= -\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{N}_v = -\mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_u = \mathfrak{r}_{uv} \cdot \mathfrak{N}, \\ D'' &= -\mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{N}_v = \mathfrak{r}_{vv} \cdot \mathfrak{N}; \end{aligned} \tag{54}$$

oder nach (51)

$$D = \frac{|\mathfrak{r}_{uu}\, \mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v|}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D' = \frac{|\mathfrak{r}_{uv}\, \mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v|}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D'' = \frac{|\mathfrak{r}_{vv}\, \mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v|}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{54'}$$

Die zweite Fundamentalform besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Da nach (37) $N = \frac{d\mathfrak{N}}{ds} \cdot \mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{N} \cdot d\mathfrak{r}}{ds^2}$ die Normalkrümmung einer Flächenkurve ist, ist nach (52b)

$$N = -\frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \tag{55}$$

die Normalkrümmung jeder Flächenkurve, die durch einen Punkt u, v in der durch $\frac{dv}{du}$ bestimmten Richtung geht, oder die gewöhnliche Krümmung des durch diese Richtung gehenden Normalschnittes der Fläche. Für die Einheitskugel wird, wenn $\mathfrak{N} = +\mathfrak{r}$ vorausgesetzt wird, die zweite Fundamentalform mit der ersten bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Dann besitzt nach (55) jeder Normalschnitt der Einheitskugel die Normalkrümmung $+1$.

51. Haupttangentenkurven. Durch das Verschwinden der zweiten Fundamentalform

$$d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N} = 0 \tag{56a}$$

oder

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0 \tag{56b}$$

ist ein die Fläche doppelt überdeckendes System von Kurven definiert, die als Haupttangentenkurven der Fläche bezeichnet werden. Die zweite Fundamentalform kann definit oder indefinit sein; im ersteren Fall sind die Haupttangentenkurven imaginär, im zweiten reell. Die Entscheidung wird durch das Vorzeichen der Diskriminante von (56b)

$$DD'' - D'^2 \gtrless 0$$

geliefert. Für den Übergangsfall $DD'' - D'^2 = 0$ fallen beide Scharen von Haupttangentenkurven zusammen.

Eine geometrische Eigenschaft der Haupttangentenkurven läßt sich aus (56a) ablesen. Beim Fortschreiten eines Flächenpunktes längs einer Haupttangentenkurve dreht sich die Tangentialebene um die Kurventangente. Weiter erkennt man aus (55), daß das Verschwinden der Normalkrümmung für die Haupttangentenkurven charakteristisch ist.

52. Sphärisches Bild einer Fläche. Trägt man die Einheitsvektoren $\mathfrak{N}$ der Normalen einer Fläche von einem Punkt O aus auf, so erfüllen ihre Endpunkte eine Einheitskugel und ordnen deren Punkte den Flächenpunkten zu; bei geeigneter Abgrenzung eines

Gebietes auf der Fläche wird die Zuordnung ein-eindeutig. Diese Zuordnung wird als **sphärische Abbildung der Fläche** bezeichnet (Fig. 38).

Zwei Nachbarpunkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ der Fläche entsprechen zwei Nachbarpunkte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} + d\mathfrak{N}$ der Bildkugel. Das Bild eines Linienelements $d\mathfrak{r}$ der Fläche ist das Linienelement $d\mathfrak{N}$ der Einheitskugel.

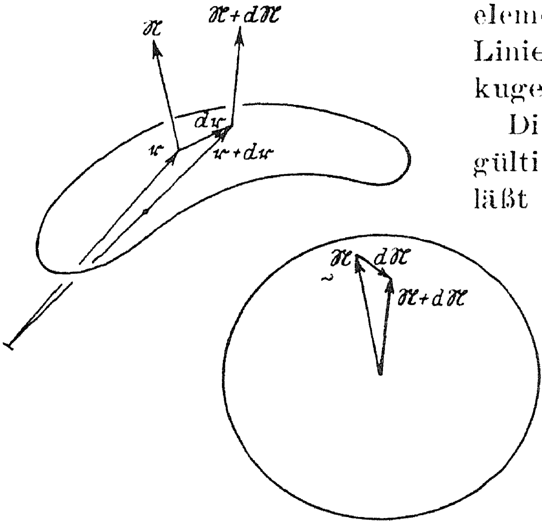


Fig. 38.

Die für Haupttangentenkurven gültige Gleichung (56a) $d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{N} = 0$ läßt sich so deuten: **Jedes Linienelement einer Haupttangentenkurve steht auf seinem sphärischen Bild senkrecht.**

Um $d\mathfrak{N}$ allgemein zu berechnen, bemerkt man, daß die Fläche und ihre Bildkugel in entsprechenden Punkten parallele Tangentialebenen besitzen. Es sind also sämtliche Linienelemente $d\mathfrak{N}$, die sämtlichen von einem Punkt der Fläche ausgehenden Linienelementen $d\mathfrak{r}$ entsprechen, zu diesen und untereinander komplanar. Folglich kann

$$d\mathfrak{N} = p\,\mathfrak{r}_u + q\,\mathfrak{r}_v \tag{57}$$

mit unbestimmten (infinitesimalen) Maßzahlen p, q angesetzt werden; dabei ist

$$d\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_u\,du + \mathfrak{N}_v\,dv.$$

Um p und q zu berechnen, multipliziert man (57) skalar mit $\mathfrak{r}_u$ und $\mathfrak{r}_v$ und erhält nach (54) und (43)

$$\begin{aligned} -D\,du - D'\,dv &= pE + qF, \\ -D'\,du - D''\,dv &= pF + qG. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und (57) lassen sich p, q eliminieren; man erhält

$$\begin{vmatrix} d\mathfrak{N} & \mathfrak{r}_u & \mathfrak{r}_v \\ -D\,du - D'\,dv & E & F \\ -D'\,du - D''\,dv & F & G \end{vmatrix} = 0. \tag{58}$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte du, dv, zerfällt also in zwei Gleichungen, die das sphärische Bild $d\mathfrak{N}$ von $d\mathfrak{r}$ vollständig bestimmen (Weingartensche Gleichungen):

$$\mathfrak{N}_u = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{r}_u & \mathfrak{r}_v & 0 \\ E & F & D \\ F & G & D' \end{vmatrix}; \quad \mathfrak{N}_v = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \mathfrak{r}_u & \mathfrak{r}_v & 0 \\ E & F & D' \\ F & G & D'' \end{vmatrix}. \quad (58')$$

53. Krümmungslinien. Da ein Linienelement $d\mathfrak{r}$ und sein sphärisches Bild $d\mathfrak{N}$ der Tangentialebene parallel sind, ist das Vektorprodukt $d\mathfrak{N} \times d\mathfrak{r}$ ein in die Richtung der Normalen fallender Vektor

$$d\mathfrak{N} \times d\mathfrak{r} = \varrho\,\mathfrak{N}. \quad (59)$$

$\varrho = [\mathfrak{N}\, d\mathfrak{N}\, d\mathfrak{r}]$ ist eine nach (58) im allgemeinen nicht verschwindende Maßzahl; ein Linienelement und sein sphärisches Bild sind im allgemeinen nicht parallel; die Normalen in benachbarten Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ einer Fläche schneiden sich im allgemeinen nicht.

Die Bedingung des Schneidens benachbarter Normalen oder des Parallelismus eines Linienelements mit seinem sphärischen Bild ist

$$d\mathfrak{N} \times d\mathfrak{r} = 0; \quad (60\,\mathrm{a})$$

diese Bedingung ist, da die Richtung des Produktvektors nach (59) bereits bekannt ist, einer einzigen skalaren Bedingung äquivalent, nämlich dem Verschwinden der Maßzahl ϱ:

$$[\mathfrak{N}\, d\mathfrak{N}\, d\mathfrak{r}] = 0. \quad (60\,\mathrm{b})$$

Diese Differential-Gleichung 2. Grades definiert eine die Fläche doppelt überdeckende Kurvenschar, ihre Krümmungslinien.

Man bemerkt, daß für die Krümmungslinien das Verschwinden der geodätischen Torsion charakteristisch ist, da die Bedingung [vgl. (33)]

$$T = \left[\mathfrak{N}\, \frac{d\mathfrak{N}}{ds}\, \mathfrak{t}\right] = 0 \quad (60\,\mathrm{c})$$

mit (60 b) gleichwertig ist.

54. Geodätische Torsion. Um die geodätische Torsion T einer beliebigen Flächenkurve mittels Gaußscher Parameter zu berechnen, setzt man (33)

$$T = \left[\mathfrak{N}\, \frac{d\mathfrak{N}}{ds}\, \mathfrak{t}\right]$$

in die Form

$$T = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{d\mathfrak{N} \times d\mathfrak{r}}{ds^2}$$

oder nach dem Entwicklungssatz

$$T = \frac{1}{ds^2 \sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{r}_u \cdot d\mathfrak{N} & \mathfrak{r}_v \cdot d\mathfrak{N} \\ \mathfrak{r}_u \cdot d\mathfrak{r} & \mathfrak{r}_v \cdot d\mathfrak{r} \end{vmatrix}.$$

Ausführung der skalaren Produkte gibt nach (43), (57)

$$T = \frac{1}{ds^2 \sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G\, dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix}. \tag{61}$$

D a m i t i s t d i e g e o d ä t i s c h e T o r s i o n a l l g e m e i n b e r e c h n e t. Die geodätische Torsion einer Kurve in einem Flächenpunkt (u, v) hängt nur von dem Quotient $\frac{dv}{du}$ ab, der die Richtung der Flächenkurve im Punkt (u, v) bestimmt; die Gleichung der Kurve tritt in T nicht auf. Es haben also alle Flächenkurven, die in einem Punkt die gleiche Tangente besitzen, dort die gleiche geodätische Torsion. Da für geodätische Linien geodätische und gewöhnliche Torsion identisch sind, erkennt man: D i e g e o d ä t i s c h e T o r s i o n e i n e r F l ä c h e n k u r v e i s t i n j e d e m P u n k t g l e i c h d e r T o r s i o n d e r s i e d o r t b e r ü h r e n d e n g e o d ä t i s c h e n L i n i e.

Ein wichtiger Satz gilt für die geodätische Torsion sich senkrecht schneidender Kurven. Wir beziehen die Fläche auf ein Orthogonalsystem $(F = 0)$ und berechnen die geodätische Torsion T_1 der u-Kurven $(v = \text{const})$ und T_2 der v-Kurven $(u = \text{const})$:

$$T_1 = \frac{1}{E du^2 \sqrt{EG}} \begin{vmatrix} E du & D\, du \\ 0 & D' du \end{vmatrix} = \frac{D'}{\sqrt{EG}};$$

$$T_2 = \frac{1}{G dv^2 \sqrt{EG}} \begin{vmatrix} 0 & D'\, dv \\ G dv & D'' dv \end{vmatrix} = -\frac{D'}{\sqrt{EG}}.$$

S i c h s e n k r e c h t s c h n e i d e n d e K u r v e n b e s i t z e n i m S c h n i t t p u n k t e n t g e g e n g e s e t z t g l e i c h e g e o d ä t i s c h e T o r s i o n:

$$T_1 + T_2 = 0. \tag{62}$$

Im folgenden soll unter Weglassung der Indices die Bezeichnung

$$T_1 = -T_2 = T \tag{62'}$$

verwendet werden.

Aus der Bedingung des Verschwindens der geodätischen Torsion für die Krümmungslinien folgt die D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g d e r K r ü m m u n g s l i n i e n für G a u ß sche Parameter:

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0. \tag{63}$$

55. Eigenschaften der Krümmungslinien. Der Vollständigkeit halber mögen einige weitere, mit der Theorie der Krümmungslinien in Beziehung stehende Sätze Erwähnung finden.

Nach (55) gibt

$$(NE+D)du^2+2(NF+D')du\,dv+(NG+D'')dv^2=0 \quad (64)$$

den Zusammenhang zwischen einer Richtung $\frac{dv}{du}$ und der Krümmung N des zugehörigen Normalschnitts; jeder vorgegebene Wert N der Normalkrümmung gehört umgekehrt zu zwei Richtungen.

N nimmt einen extremen Wert an, wenn gleichzeitig mit (64) auch die beiden Gleichungen bestehen, die aus (64) durch Differentiieren nach $\frac{du}{dv}$ oder $\frac{dv}{du}$ hervorgehen:

$$\begin{aligned}(NE+D)du+(NF+D')dv&=0,\\(NF+D')du+(NG+D'')dv&=0.\end{aligned} \quad (65)$$

Durch Elimination von N erhält man hieraus die Differentialgleichung (63) der Krümmungslinien als der Kurven, in denen die Normalkrümmung einen Extremwert annimmt. Diese Extremwerte heißen Hauptkrümmungen und sollen mit N_{I} und N_{II} bezeichnet werden. Sie sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung, die aus (65) durch Elimination von $\frac{dv}{du}$ hervorgeht

$$\begin{vmatrix} NE+D & NF+D' \\ NF+D' & NG+D'' \end{vmatrix}=0$$

oder

$$N^2(EG-F^2)+N(ED''-2FD'+GD)+(DD''-D'^2)=0. \quad (66)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen ablesen; man bezeichnet als Gaußsche Krümmung K der Fläche das Produkt, als mittlere Krümmung H der Fläche das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen, und erhält

$$K=N_{\mathrm{I}}N_{\mathrm{II}}=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}, \quad (67a)$$

$$H=\frac{1}{2}(N_{\mathrm{I}}+N_{\mathrm{II}})=-\frac{1}{2}\frac{ED''-2FD'+GD}{EG-F^2}. \quad (67b)$$

Namentlich die Gaußsche Krümmung ist von fundamentaler Bedeutung und wird uns später noch vielfach beschäftigen.

Endlich sei noch gezeigt, daß die Krümmungslinien, die, wie erwähnt, die Fläche doppelt überdecken, ein Orthogonalsystem bilden. Betrachtet man die beiden Scharen von Krüm-

mungslinien selbst als Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, so muß die Differentialgleichung (63) durch $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$, also $du = 0$ und $dv = 0$ erfüllt sein. Hiernach ist

$$\begin{vmatrix} E & F \\ D & D' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} F & G \\ D' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Schließt man den nur für ganz spezielle Flächen (Kugel und Ebene) geltenden Fall aus, daß die beiden Fundamentalformen proportional sind, also jedes Linienelement seinem sphärischen Bild parallel ist und benachbarte Normalen sich immer schneiden, so sind diese beiden Gleichungen nur erfüllt, wenn gleichzeitig

$$F = 0 \text{ und } D' = 0$$

ist. Die erste dieser Bedingungen ist in der Tat die Orthogonalitätsbedingung, während auf die geometrische Bedeutung der zweiten nicht eingegangen werden soll.

§ 5. Natürliche Geometrie der Flächen.

56. Rückkehr zur natürlichen Geometrie. Die natürliche Geometrie einer Raumkurve, gleichgültig ob diese frei im Raum oder als Kurve einer Fläche betrachtet wurde, war auf der Einführung der Bogenlänge als Parameter aufgebaut. Um zu einer natürlichen Geometrie einer Fläche zu kommen, liegt der Versuch nahe, zwei geeignet zu wählende Bogenlängen als natürliche Parameter zur Festlegung eines Punktes einzuführen.

Bei einem vorgelegten System von Parameterkurven u, v hat man zu unterscheiden zwischen der Gesamtheit der beiden Kurvenscharen, welche allen kontinuierlich veränderlichen Werten von u und v entsprechen, und einem der Anschauung dienenden Netz von Kurven, welche diskreten Werten von u und v mit gleichen Parameterdifferenzen Δu und Δv entsprechen, z. B. den ganzzahligen Parameterwerten; dieses Netz läßt sich nachher durch gleichartige Unterteilung der Parameterdifferenzen beliebig verdichten, bleibt aber gleichwohl von der Gesamtheit der Kurven begrifflich verschieden. Das Kurvennetz besitzt z. B. ein bestimmtes Netz von Diagonalkurven, die Kurvengesamtheit aber nicht.

Durch Einführung neuer Parameter $U = f(u)$, $V = g(v)$, welche nur von je einem der alten Parameter abhängen, wird weder die einzelne Parameterkurve noch ihre Gesamtheit, wohl aber ihre Anordnung zu einem Netz geändert.

In dem Netz sind die Linienelemente (Fig. 39)

$$ds_1 = \sqrt{E}\,du, \quad ds_2 = \sqrt{G}\,dv \tag{68}$$

die Maschenlängen der durch 2 Nachbarpunkte P und Q bestimmten Netzmasche. Da E und G im allgemeinen von u und v gleichzeitig abhängen, sind ds_1 und ds_2 keine integrablen Differentiale; es existieren in dem Netz keine als Bogenlängen zu deutenden Parameter s_1 und s_2, die Funktionen von u, bzw. v allein sind.

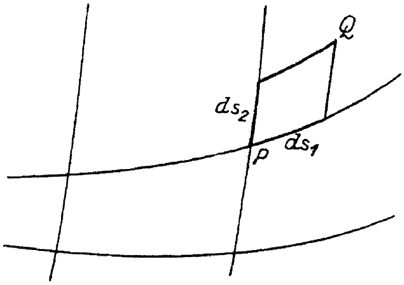


Fig. 39.

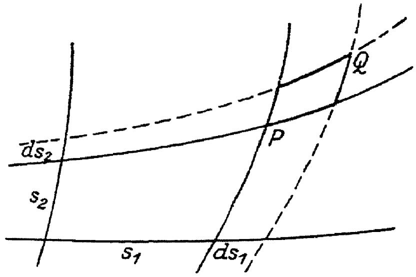


Fig. 40.

Geometrisch ist das klar. Die zwischen zwei Parameterkurven u_1 und u_2 auf den Kurven $v = \text{const}$ gemessene Bogenlänge

$$s_1 \Big|_1^2 = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v)}\,du$$

ist eine Funktion des Parameters v, und bleibt das auch, wenn die Anordnung der Kurven $u = \text{const}$ geändert wird. Wollte man wie in Fig. 40 versuchen, s_1 und s_2 dadurch zu Funktionen von u, bzw. v allein zu machen, daß man sie auf festen Parameterkurven mißt, so hätte man zwar zwei einen Punkt P der Fläche bestimmende, als Bogenlängen zu deutende Parameter, aber diese Bogenlängen würden nicht im Punkt P enden und die Differentiale ds_1, ds_2 nicht die Maschenlängen in der durch P und einen Nachbarpunkt Q definierten Netzmasche sein. Eine Ausnahme von dieser Betrachtung machen nur die als Gewebe bezeichneten Netze, die aus Rhomben von gleicher Maschenlänge bestehen; solche gibt es auf jeder Fläche, doch bereitet die Bestimmung des Maschenwinkels Schwierigkeiten (Tschebycheffsches Problem). Quadratische Gewebe gibt es nur in der Ebene und auf den darauf abwickelbaren Flächen.

Für den Aufbau der natürlichen Geometrie einer Fläche legt man am besten zwei orthogonale Kurvenscharen u, v mit $F = 0$ zugrunde, da bereits in der natürlichen Geometrie einer

Flächenkurve in jedem Punkt die Senkrechte auf der Kurve auftritt. Neben den tatsächlich stets vorhandenen und für die Berechnung geometrischer Größen als Ortsfunktionen auf der Fläche unvermeidlichen, aber selten in Erscheinung tretenden Urparametern u, v verwendet man zur Berechnung der Änderungen geometrischer Größen die nicht integrablen Bogen-Differentiale ds_1, ds_2 nach (68).

Im folgenden werden alle auf die u-Kurven ($v = \text{const}$) und v-Kurven ($u = \text{const}$) sich beziehenden Größen durch die Indices 1, bzw. 2 bezeichnet; so insbesondere die 3 Krümmungen jeder der beiden Kurven mit

$$\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{T}_1 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{T}_2.$$

57. Richtungsdifferentialquotienten und Integrabilitätsbedingung. Unter dem Richtungsdifferentialquotient einer skalaren oder vektoriellen Ortsfunktion $f = f(u, v)$ auf der Fläche in Richtung einer Kurve der ersten Schar wird der Grenzwert

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta s_1} = \lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\int\limits_u^{u+\Delta u} \sqrt{E(u, v)}\, du} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u}$$

verstanden und mit $\frac{\partial f}{\partial s_1}$ bezeichnet.

Also:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u};$$

ebenso (69)

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Der Begriff des Richtungsdifferentialquotienten deckt sich mit dem des gewöhnlichen Differentialquotienten, wenn ds_1 bzw. ds_2 ein integrables Differential, also s_1 bzw. s_2 ein Parameter ist; für nicht integrable Differentiale stellt er eine Verallgemeinerung dieses Begriffes dar. Man wird also auch nicht erwarten, daß sämtliche Gesetze der gewöhnlichen Differentialrechnung für Richtungsdifferentialquotienten gelten. Insbesondere gilt folgender Satz: In höheren Richtungsdifferentialquotienten nach verschiedenen Richtungen ist die Reihenfolge der Differentiationen nicht vertauschbar.

Um ihn zu beweisen, geht man von der Vertauschbarkeit der Differentiationen in der gewöhnlichen Differentialrechnung aus. Man bildet

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{\partial f}{\partial s_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \sqrt{G}\,\frac{\partial f}{\partial s_2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial f}{\partial s_1}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v} = \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\sqrt{G}\,\frac{\partial f}{\partial s_2}\right).$$

Wegen der Gleichheit der linken Seiten der beiden letzten Gleichungen gilt die Gleichheit der rechten Seiten:

$$\sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) = \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\sqrt{G}\,\frac{\partial f}{\partial s_2}\right).$$

Bei der Ausführung der Differentiation ist zu bemerken, daß die Differentiation eines Produkts wie gewöhnlich erfolgt; das ist nach (69) einzusehen. Für die dann auftretenden 2. Differentialquotienten wird festgesetzt, daß

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\,\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1}$$

geschrieben werden soll, daß also die rechtsstehende Operation zuerst ausgeführt werden soll. Dann gilt

$$\sqrt{EG}\,\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} + \sqrt{G}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\frac{\partial f}{\partial s_1} = \sqrt{EG}\,\frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} + \sqrt{E}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\frac{\partial f}{\partial s_2},$$

also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial \lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\frac{\partial f}{\partial s_1}. \tag{70a}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, ist der Satz bewiesen.

Die Koeffizienten der ersten Differentialquotienten in (70a) sind die geodätischen Krümmungen der Parameterkurven; das kann nach (50a, b) als bekannt übernommen werden, wird aber unten auch unabhängig bewiesen; also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = G_1\,\frac{\partial f}{\partial s_1} - G_2\,\frac{\partial f}{\partial s_2}. \tag{70b}$$

Diese Gleichung wird häufig nur für die Operationssymbole angeschrieben[1]):

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} = G_1\,\frac{\partial}{\partial s_1} - G_2\,\frac{\partial}{\partial s_2}. \tag{70c}$$

Sie findet stets Verwendung, wenn die Aufstellung der Integrabilitäts-Bedingung eines simultanen Systems von Differentialgleichungen notwendig wird; sie soll selbst als Integrabilitäts-Bedingung bezeichnet werden.

1) Cesaro-Kowalewski, Natürliche Geometrie. (1901.) S. 199.

Zunächst soll also in einer von der Methode der Gaußschen Parameter unabhängigen Weise gezeigt werden, daß G_1 und G_2 die geodätischen Krümmungen der Kurven beider Scharen sind. Setzt man für f den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ein, also $\frac{\partial f}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1$, $\frac{\partial f}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2$, so wird (70b)

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = G_1 \mathfrak{t}_1 - G_2 \mathfrak{t}_2. \tag{71}$$

Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{t}_1$ bzw. $\mathfrak{t}_2$ folgt, daß in der Tat

$$G_1 = -\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_1 = \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_2,$$

$$G_2 = -\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_2 = \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_1,$$

in Übereinstimmung mit (37) die beiden geodätischen Krümmungen sind.

Multipliziert man weiter (71) skalar mit $\mathfrak{N}$, so folgt

$$\frac{d \mathfrak{t}_1}{d s_2} \cdot \mathfrak{N} - \frac{d \mathfrak{t}_2}{d s_1} \cdot \mathfrak{N} = 0. \tag{72}$$

Bildet $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem, mithin $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{N}$ ein Linkssystem, so ist nach (33) und zufolge der Bemerkung über das Vorzeichen der Torsion bei Verwendung von Linkssystemen [Ziff. 42, letzter Satz]:

$$\frac{d \mathfrak{t}_2}{d s_1} \cdot \mathfrak{N} = T_1; \quad \frac{d \mathfrak{t}_1}{d s_2} \cdot \mathfrak{N} = -T_2. \tag{73}$$

Somit folgt nach (72) die bereits bekannte Relation (62)

$$T_1 + T_2 = 0, \tag{73'}$$

die also auch nicht aus der Theorie der Gaußschen Parameter übernommen zu werden braucht.

58. Geometrische Deutung der Integrabilitätsbedingung. Der Integrabilitätsbedingung kann ein geometrischer Sinn beigelegt werden; hierzu bringt man sie am besten in eine andere Form. Wir nehmen auf einer Fläche zwei Kurvenscharen u und v und bezeichnen die Änderung einer Funktion $f = f(u, v)$, wenn u um du wächst, mit $d_1 f = \frac{\partial f}{\partial u} du$, ihre Änderung, wenn v um dv wächst, mit $d_2 f = \frac{\partial f}{\partial v} dv$. Der Funktionswert in dem Punkt $(u + du,\ v + dv)$, der dem Ausgangspunkt (u, v) in einer Masche des Kurvennetzes gegenüberliegt, kann auf zweierlei Wegen berechnet werden. Auf dem ersten Weg läßt man zuerst u um du wachsen und erhält (Fig. 41)

$$f(u + du, v) = f + d_1 f,$$

sodann v um dv und erhält

$$f(u+du, v+dv) = f + d_1 f + d_2(f + d_1 f)$$
$$= f + d_1 f + d_2 f + d_2 d_1 f.$$

Auf dem zweiten Weg läßt man zuerst v, dann u sich ändern und erhält

$$f(u+du, v+dv) = f + d_1 f + d_2 f + d_1 d_2 f.$$

Ist $f(u,v)$ **eine eindeutige Funktion** in der Umgebung von (u, v) auf der Fläche, so sind die beiden erhaltenen Werte gleich, also

$$d_2 d_1 f - d_1 d_2 f = 0. \qquad (74)$$

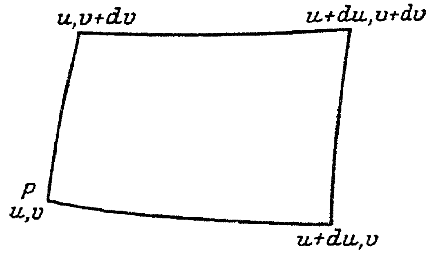


Fig. 41.

Um nun die linke Seite dieser Eindeutigkeitsbedingung zu berechnen, bildet man

$$d_2 d_1 f = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} du\, dv$$

oder nach (69)

$$d_2 d_1 f = \sqrt{G}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial f}{\partial s_1}\right)\frac{ds_1\, ds_2}{\sqrt{EG}}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - G_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}\right) ds_1\, ds_2.$$

Damit geht die Eindeutigkeitsbedingung (74) in die Integrabilitätsbedingung (70b)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} - G_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}\right) ds_1\, ds_2 = 0 \qquad (75)$$

über

Die Bedingung (71), in der f durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ersetzt ist, wird als die Schließungsbedingung für ein von zwei Kurvenpaaren beider Scharen bestimmtes Viereck erkannt; nach (74) erhält man

$$d_2 d_1 \mathfrak{r} - d_1 d_2 \mathfrak{r} = 0; \qquad (74')$$

diese Gleichung läßt sich auch durch die Anschauung aus Fig. 42 ablesen.

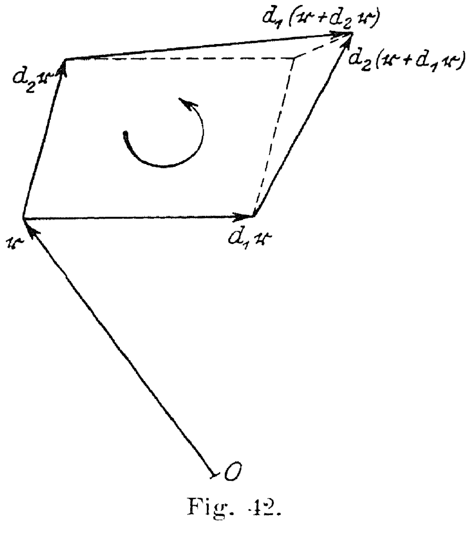


Fig. 42.

Wir bemerken, daß zwei Kurvenscharen im Raum nur dann auf **einer** Fläche liegen, wenn zwischen ihren Richtungen und ihren Richtungsänderungen eine ganz

bestimmte lineare Beziehung von der Form (71) besteht, und daß dann die Maßzahlen $\boldsymbol{G}_1$ und $\boldsymbol{G}_2$, die in dieser Beziehung auftreten, die geodätischen Krümmungen der Kurven auf der Fläche sind.

Die allgemeine Eindeutigkeitsbedingung (74) sagt aus, daß eine eindeutig definierte skalare oder vektorielle Funktion f auf der Fläche beim Umlauf des Funktionsortes um ein geschlossenes Viereck wieder ihren Ausgangswert annimmt.

59. Fundamentalformeln der Flächentheorie. Jetzt ist es leicht, die natürliche Geometrie einer Fläche aufzubauen, indem man die Formeln (35) und (36) für die Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Flächenkurve auf die beiden Scharen von sich orthogonal schneidenden Parameterkurven anwendet.

Für die Kurven der ersten Schar hat man $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ für die zweite durch $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{N}$ zu ersetzen. Nimmt man $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ als Rechtssystem, also $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{N}$ als Linkssystem an, so sind für die erste Kurvenschar $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{T}$ durch $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{T}_1$, für die zweite durch $\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{G}_2$, $-\boldsymbol{T}_2$ zu ersetzen; dabei kann man wieder nach (73′) und (62) $\boldsymbol{T}_1 = -\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}$ setzen. Endlich hat man von den beiden Darbouxschen Vektoren $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ den ersten wie in (36), den zweiten mit umgekehrten Vorzeichen anzusetzen. [Vgl. Ziff. 41, letzter Satz.]

Somit ergeben sich folgende Fundamentalformeln[1]):

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{t}_1 = \quad * \quad \boldsymbol{G}_1 \mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{N}_1 \mathfrak{N},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{t}_2 = -\boldsymbol{G}_1 \mathfrak{t}_1 \quad * \quad + \boldsymbol{T}\mathfrak{N}, \tag{76a}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{N} = \boldsymbol{N}_1 \mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{T}\mathfrak{t}_2 \quad * \quad,$$
$$\mathfrak{u}_1 = \boldsymbol{T}\mathfrak{t}_1 + \boldsymbol{N}_1 \mathfrak{t}_2 + \boldsymbol{G}_1 \mathfrak{N}. \tag{77a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{t}_2 \quad * \quad \boldsymbol{G}_2 \mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{N}_2 \mathfrak{N},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{t}_1 = -\boldsymbol{G}_2 \mathfrak{t}_2 \quad * \quad + \boldsymbol{T}\mathfrak{N}. \tag{76b}$$
$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{N} = \boldsymbol{N}_2 \mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{T}\mathfrak{t}_1 \quad * \quad,$$
$$\mathfrak{u}_2 = -\boldsymbol{T}\mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{N}_2 \mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{G}_2 \mathfrak{N}. \tag{77b}$$

---

1) Diese Formeln sind den Unbeweglichkeitsbedingungen gleichwertig, die sich bei Cesaro-Kowalewski, Natürliche Geometrie (1901), S. 201 finden. Die vektoriellen Formeln finden sich bei Burali Forti, Fondamenti per la geometria differentiale col metodo vettoriale generale. Rendiconti di Palermo **33**, 1912, S. 1 ff., in der hier angegebenen Form und Bezeichnung bei Lagally, Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik **4**, 1924, S. 377 ff.

Durch skalare Multiplikation von (76a, b) mit $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ kann man nachträglich die Richtigkeit der auftretenden Maßzahlen N_1, N_2, G_1, G_2, T bestätigen. Für die Bewegung eines mit dem Dreibein starr verbundenen Vektors $\mathfrak{v}$ gilt nach (7)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} = \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v}; \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} = \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v}. \tag{78}$$

60. Formeln von Gauß und Codazzi. Die in den Fundamentalformeln auftretenden Werte der Paare von Differentialquotienten je eines der 3 Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ werden nur dann miteinander verträglich sein, wenn sie der Integrabilitätsbedingung genügen, die für jeden der 3 Vektoren gesondert aufzustellen ist.

Man kann diese 3 Integrabilitätsbedingungen aber durch eine einzige ersetzen, die einen einfachen geometrischen Sinn besitzt. Wir denken uns auf der Fläche ein von je zwei Kurven jeder der beiden orthogonalen Scharen gebildetes Viereck, und weiter einen Vektor $\mathfrak{v}$, der mit dem begleitenden Dreibein einer dieser Kurven starr verbunden ist. Dieses Dreibein kann man um das Viereck bewegen; in jeder Ecke tritt eine Vertauschung der Kurventangente mit der Kurvennormalen ein, die Flächennormale bleibt erhalten. Der mit dem Dreibein starr verbundene Vektor $\mathfrak{v}$ ändert sich aber auch in den Ecken stetig, kommt nach dem Umlaufen des Vierecks mit dem ursprünglichen Betrag und der ursprünglichen Richtung im Ausgangspunkt wieder an, ist überhaupt in der Umgebung des Ausgangspunktes eindeutig.

Der Vektor $\mathfrak{v}$ genügt also der Integrabilitätsbedingung (70c)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial s_1 \partial s_2} = G_1 \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} - G_2 \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2}$$

oder nach (78)

$$\frac{\partial}{\partial s_2}(\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v}) - \frac{\partial}{\partial s_1}(\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v}) = G_1 \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v} - G_2 \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v}.$$

Differentiation der Vektorprodukte und nochmalige Anwendung von (78) liefert

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1}\right) \times \mathfrak{v} + \mathfrak{u}_1 \times (\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{v}) - \mathfrak{u}_2 \times (\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v}) = (G_1 \mathfrak{u}_1 - G_2 \mathfrak{u}_2) \times \mathfrak{v}.$$

Jetzt kann man nach Ziff. 21 (51) die Differenz der beiden dreifachen Vektorprodukte durch das dreifache Vektorprodukt $(\mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2) \times \mathfrak{v}$ ersetzen; weil dann sämtliche Glieder der Gleichung den Faktor $\mathfrak{v}$ enthalten und die Gleichung für jeden Wert von $\mathfrak{v}$ gilt, kann man diesen Faktor weglassen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{u}_2}{\partial s_1} + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2 = G_1 \mathfrak{u}_1 - G_2 \mathfrak{u}_2 \tag{79}$$

als **Integrabilitätsbedingung.** Dieser Bedingung müssen die zu beiden Kurvenscharen gehörigen Darbouxschen Vektoren genügen, damit eine eindeutige Bewegung eines begleitenden Dreibeins um ein Kurvenviereck möglich ist.

Die Gleichung (79) ist 3 skalaren Gleichungen gleichwertig. Nach (77a, b) erhält man:

$$\frac{\partial T}{\partial s_2}\mathfrak{t}_1+\frac{\partial N_1}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2+\frac{\partial G_1}{\partial s_2}\mathfrak{N}+\frac{\partial T}{\partial s_1}\mathfrak{t}_2+\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1+\frac{\partial G_2}{\partial s_1}\mathfrak{N}$$
$$+T\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2}+N_1\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2}+G_1\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2}+T\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1}+N_2\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1}+G_2\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \tag{80}$$
$$=\begin{vmatrix}\mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_2 & \mathfrak{N}\\ T & N_1 & G_1\\ N_2 & T & G_2\end{vmatrix}+G_1(T\mathfrak{t}_1+N_1\mathfrak{t}_2+G_1\mathfrak{N})+G_2(T\mathfrak{t}_2+N_2\mathfrak{t}_1+G_2\mathfrak{N}).$$

Ersetzt man nun die Richtungsdifferentialquotienten nach (76a, b) durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$ und ordnet nach diesen, so zerfällt (80) in 3 Gleichungen[1]) zwischen N_1, N_2, G_1, G_2, T:

$$\frac{\partial N_2}{\partial s_1}+\frac{\partial T}{\partial s_2}+(N_1-N_2)G_2-2TG_1=0; \tag{81a}$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial s_2}+\frac{\partial T}{\partial s_1}+(N_2-N_1)G_1-2TG_2=0; \tag{81b}$$
$$\frac{\partial G_1}{\partial s_2}+\frac{\partial G_2}{\partial s_1}-G_1{}^2-G_2{}^2=N_1N_2-T^2. \tag{81c}$$

Die wichtigste von diesen 3 Gleichungen ist die dritte, die **Gaußsche Gleichung**; die beiden ersten pflegt man als **Codazzische** Gleichungen zu bezeichnen.

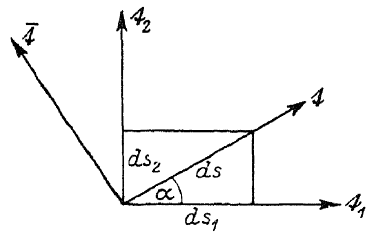


Fig. 43.

61. Gaußsche und mittlere Krümmung. In einem von zwei Paaren der orthogonalen Parameterkurven auf der Fläche gebildeten Viereck bezeichnen wir die vom Punkt u, v ausgehende Diagonale mit ds; sie bilde mit den Seiten ds_1 und ds_2 die Winkel α und $\frac{\pi}{2}-\alpha$, so daß (Fig. 43)

$$\frac{ds_1}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{ds_2}{ds}=\sin\alpha \tag{82}$$

ist. Dann wollen wir den **Richtungsdifferentialquotient** $\frac{\partial f}{\partial s}$ einer Ortsfunktion f bilden.

1) Vgl. Cesaro-Kowalewski, Natürliche Geometrie (1901), S. 202.

Die Änderung der Funktion f beim Übergang des Funktionsortes in die gegenüberliegende Ecke des Vierecks ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial s} ds;$$

anderseits ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} ds_2;$$

somit nach (82)

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s_1} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial s_2} \sin\alpha. \tag{83}$$

Jetzt wollen wir weiter die Normalkrümmung $\boldsymbol{N}'$ und geodätische Torsion $\boldsymbol{T}'$ für die Richtung der Diagonale ds berechnen. Hierzu bezeichnen wir wie bisher die Richtung von ds_1 und ds_2 mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$; dann legen wir in die Richtung von ds einen Einheitsvektor

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\alpha + \mathfrak{t}_2 \sin\alpha \tag{84}$$

und setzen außerdem noch einen darauf senkrechten Einheitsvektor

$$\bar{\mathfrak{t}} = -\mathfrak{t}_1 \sin\alpha + \mathfrak{t}_2 \cos\alpha \tag{84'}$$

derart fest, daß $\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{N}$ ein Rechtssystem bilden, wenn $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{N}$ das tun.

Endlich multiplizieren wir den Richtungsdifferentialquotient von $\mathfrak{N}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} \sin\alpha$$

skalar mit $\mathfrak{t}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$. Nach (84), (84') ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s} \cdot \mathfrak{t} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_1 \cos^2\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_2 + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_1\right) \cos\alpha \sin\alpha + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_2 \sin^2\alpha,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s} \cdot \bar{\mathfrak{t}} = \left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_1 + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_2\right) \sin\alpha \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} \cdot \mathfrak{t}_2 \cos^2\alpha - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} \cdot \mathfrak{t}_1 \sin^2\alpha\right);$$

oder mit Rücksicht auf (37)

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N}_1 \cos^2\alpha - 2\boldsymbol{T} \sin\alpha \cos\alpha + \boldsymbol{N}_2 \sin^2\alpha; \tag{85a}$$

$$\boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_2) \sin\alpha \cos\alpha + \boldsymbol{T}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{85b}$$

Damit sind die Werte von $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{T}$ für eine beliebige Richtung auf die für zwei aufeinander senkrechte Richtungen zurückgeführt. Besonders einfach wird (85a), wenn die Krümmungslinien als Parameterkurven verwendet werden, also $\boldsymbol{T}$ Null ist; man erhält den Eulerschen Satz:

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N}_{\mathrm{I}} \cos^2\alpha + \boldsymbol{N}_{\mathrm{II}} \sin^2\alpha. \tag{86}$$

Die Normalkrümmung für eine beliebige Richtung ist linear durch die beiden Hauptnormalkrümmungen $\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}$ ausdrückbar.

Bildet man nach (85a) noch die Normalkrümmung $\boldsymbol{N}''$ für die Richtung $\bar{\mathfrak{t}}$, also den Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$:

$$\boldsymbol{N}'' = \boldsymbol{N}_1 \sin^2 \alpha + 2\boldsymbol{T} \sin \alpha \cos \alpha + \boldsymbol{N}_2 \cos^2 \alpha,$$

so kann man die Gültigkeit folgender zwei Gleichungen erkennen:

$$\boldsymbol{N}' + \boldsymbol{N}'' = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2; \tag{87a}$$

$$\boldsymbol{N}'\boldsymbol{N}'' - \boldsymbol{T}'^2 = \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2 - \boldsymbol{T}^2. \tag{87b}$$

Damit sind zwei Invarianten gefunden, deren Bedeutung schon aus der Theorie der Gaußschen Parameter bekannt ist; nimmt man als eines der Orthogonalsysteme die Krümmungslinien, so erkennt man nach (67a, b) in

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2 - \boldsymbol{T}^2 \tag{88a}$$

und

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{N}_{\mathrm{II}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2) \tag{88b}$$

die Gaußsche und mittlere Krümmung der Fläche wieder.

Von Wichtigkeit ist noch folgende Bemerkung. Die Gaußsche Gleichung (81c) läßt sich jetzt in die Form:

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \boldsymbol{G}_2}{\partial s_1} - \boldsymbol{G}_1{}^2 - \boldsymbol{G}_2{}^2 = \boldsymbol{K} \tag{89}$$

setzen. Da die linke Seite nur vom Linienelement der Fläche abhängt, also biegungsinvariant ist (vgl. Ziff. 48), gilt das gleiche von der rechten Seite; die Gaußsche Krümmung $\boldsymbol{K}$ ist eine Biegungsinvariante. Hierin liegt die grundsätzliche Bedeutung der Gaußschen Gleichung.

62. Dreifache Orthogonalsysteme. Ein besonders interessantes Objekt der räumlichen Geometrie bilden die Systeme von drei sich gegenseitig rechtwinklig schneidenden Flächenscharen.

In jedem Schnittpunkt dreier Flächen schneiden sich die drei Schnittkurven von je zweien paarweise senkrecht. Die Einheitsvektoren der Tangenten dieser drei Kurven bilden ein Dreibein und sollen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ heißen. Je zwei von den drei Einheitsvektoren bestimmen die Tangentialebene einer der drei Flächen; der dritte gibt dann die Richtung ihrer Normalen und der Schnittlinie der beiden anderen Flächen.

Wenn sich das begleitende Dreibein $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ längs einer der drei Schnittkurven bewegt, läßt sich der zugehörige Darbouxsche Drehvektor jedesmal in zwei verschiedenen Gestalten ansetzen: denn seine Maßzahlen sind die Krümmungen der Schnittkurve.

wenn diese als Flächenkurve auf einer der beiden sich in ihr schneidenden Flächen aufgefaßt wird.

Gibt man den Krümmungen $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{G}$ je zwei Indizes, deren erster die Tangentenrichtung der Flächenkurve, deren zweiter die Normalenrichtung der Fläche bezeichnet, auf der die Kurve liegt, und der Krümmung $\boldsymbol{T}$ nur den letzteren Index, so erhält man für die zu $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ gehörigen Drehvektoren $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= \boldsymbol{T}_3\mathfrak{t}_1 + \boldsymbol{N}_{13}\mathfrak{t}_2 + \boldsymbol{G}_{13}\mathfrak{t}_3 = -\boldsymbol{T}_2\mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{N}_{12}\mathfrak{t}_3 - \boldsymbol{G}_{12}\mathfrak{t}_2,\\
\mathfrak{u}_2 &= \boldsymbol{T}_1\mathfrak{t}_2 + \boldsymbol{N}_{21}\mathfrak{t}_3 + \boldsymbol{G}_{21}\mathfrak{t}_1 = -\boldsymbol{T}_3\mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{N}_{23}\mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{G}_{23}\mathfrak{t}_3,\\
\mathfrak{u}_3 &= \boldsymbol{T}_2\mathfrak{t}_3 + \boldsymbol{N}_{32}\mathfrak{t}_1 + \boldsymbol{G}_{32}\mathfrak{t}_2 = -\boldsymbol{T}_1\mathfrak{t}_3 - \boldsymbol{N}_{31}\mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{G}_{31}\mathfrak{t}_1.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man zunächst

$$\boldsymbol{T}_3 = -\boldsymbol{T}_2, \quad \boldsymbol{T}_1 = -\boldsymbol{T}_3, \quad \boldsymbol{T}_2 = -\boldsymbol{T}_1,$$

also

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}_3 = 0. \tag{90}$$

Hierin liegt der Dupinsche Satz: **Die Schnittkurven der Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems sind auf jeder der Flächen die Krümmungslinien.**

Ferner gibt der Vergleich:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{N}_{13} = -\boldsymbol{G}_{12} \qquad \text{usw., allgemein}\\
&\boldsymbol{N}_{ik} = -\boldsymbol{G}_{il} \quad (i \neq k \neq l) \quad (i, k, l = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{91}$$

Die Normalkrümmung einer Schnittkurve zweier Flächen für eine dieser Flächen ist (bis auf das Vorzeichen) **die geodätische Krümmung für die andere.**

Damit erhält man für die Drehvektoren folgende endgültige Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= \quad * \qquad \boldsymbol{N}_{13}\mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{N}_{12}\mathfrak{t}_3,\\
\mathfrak{u}_2 &= -\boldsymbol{N}_{23}\mathfrak{t}_1 \quad * \quad + \boldsymbol{N}_{21}\mathfrak{t}_3,\\
\mathfrak{u}_3 &= \boldsymbol{N}_{32}\mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{N}_{31}\mathfrak{t}_2 \quad *
\end{aligned} \tag{92}$$

Daraus folgen für die Richtungsdifferentialquotienten von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, nach (7) und (76a. b)

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_i}{\partial s_k} = \mathfrak{u}_k \times \mathfrak{t}_i \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{93}$$

die folgenden Ausdrücke: (94)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_1} = -\boldsymbol{N}_{12}\mathfrak{t}_2 - \boldsymbol{N}_{13}\mathfrak{t}_3; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} = \boldsymbol{N}_{21}\mathfrak{t}_2; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_3} = \boldsymbol{N}_{31}\mathfrak{t}_3;\\
&\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = \boldsymbol{N}_{12}\mathfrak{t}_1; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_2} = -\boldsymbol{N}_{21}\mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{N}_{23}\mathfrak{t}_3; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_3} = \boldsymbol{N}_{32}\mathfrak{t}_3;\\
&\frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_1} = \boldsymbol{N}_{13}\mathfrak{t}_1; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_2} = \boldsymbol{N}_{23}\mathfrak{t}_2; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial s_3} = -\boldsymbol{N}_{31}\mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{N}_{32}\mathfrak{t}_2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Richtungsänderungen der Schnittkurven des dreifachen Orthogonalsystems und damit die Bewegung eines begleitenden Dreibeins durch die 6 Normalkrümmungen der Schnittkurven. Sie lassen sich auch geometrisch einfach deuten mit Hilfe der sphärischen Abbildung.

Für die 3 Paare von Richtungsdifferentiationen bestehen 3 Integrabilitätsbedingungen; sie werden nach (70c) und (91)

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} = N_{21} \frac{\partial}{\partial s_2} - N_{12} \frac{\partial}{\partial s_1}$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen; ihre Anwendung auf (94) gibt ein System von 9 Gleichungen, das man auch unmittelbar aus den Gauß-Codazzischen Gleichungen (81) herleiten kann. Es besteht aus 6 Gleichungen von der Form[1]):

$$\frac{\partial N_{23}}{\partial s_1} + (N_{23} - N_{13}) N_{21} = 0 \tag{95a}$$

und 3 Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + \frac{\partial N_{21}}{\partial s_1} + N_{12}^2 + N_{21}^2 + N_{13} N_{23} = 0. \tag{95b}$$

Dieses Gleichungssystem ist von Lamé aufgestellt worden.

63. Linienelement des Raumes. Sind ds_1, ds_2, ds_3 drei Linienelemente der Schnittkurven dreier Flächen eines dreifach orthogonalen Systems, so berechnet sich das Linienelement ds des Raumes aus

$$ds^2 = ds_1{}^2 + ds_2{}^2 + ds_3{}^2;$$

dabei darf nicht übersehen werden, daß ds_1, ds_2, ds_3 nicht integrable Differentiale sind.

Ist anderseits $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v, w)$ der Ortsvektor eines Punktes im Raum, so geben $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ 3 Flächenscharen. Auf jeder Fläche sind die beiden veränderlich gelassenen Parameter als Gaußsche Parameter zur Kennzeichnung der Flächenpunkte geeignet. Je zwei Flächen verschiedener Scharen schneiden sich in einer Kurve, auf der 2 Parameter konstant sind und nur einer veränderlich ist.

Das gerichtete Linienelement im Raum ist dann

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_u du + \mathfrak{r}_v dv + \mathfrak{r}_w dw;$$

diese Darstellung gibt die Zerlegung in Komponenten in Richtung der Schnittkurven. Das Linienelement ds des Raumes ergibt sich dann aus

$$ds^2 = d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{r}.$$

1) Vgl. G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux 1910, S. 192.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß die 3 Flächenscharen ein Orthogonalsystem bilden, mithin die Schnittkurven aufeinander senkrecht stehen. Dann ist

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v = \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_w = \mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_w = 0.$$

Setzt man dann abkürzend

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u = U^2, \quad \mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_v = V^2, \quad \mathfrak{r}_w \cdot \mathfrak{r}_w = W^2,$$

wo $U = U(u, v, w)$, $V = V(u, v, w)$, $W = W(u, v, w)$ Funktionen von u, v, w sind, so wird das Linienelement des Raumes

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2. \tag{96}$$

Es soll nun unter Verwendung dieses auf Gaußsche Parameter bezogenen Linienelementes die Bewegung eines begleitenden Dreibeins untersucht werden. Dabei handelt es sich im wesentlichen um eine Umformung des mit den Methoden der natürlichen Geometrie gewonnenen Gleichungssystems (94).

Zunächst lassen sich die 6 Normalkrümmungen nach (91) als geodätische Krümmungen, also mittels des Linienelementes je einer der orthogonalen Flächen berechnen; z. B. ist auf einer Fläche $w = \text{const}$, $dw = 0$

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2,$$

mithin nach (91) und (50a):

$$\boldsymbol{N}_{12} = -\boldsymbol{G}_{13} = \frac{1}{UV}\frac{\partial U}{\partial v}. \tag{97}$$

Ferner ist $\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}$ usw. Damit lassen sich die Gleichungen (94) für die Bewegung des Dreibeins sofort für Gaußsche Parameter umschreiben: (98)

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial u} = -\frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial v}\mathfrak{t}_2 - \frac{1}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\mathfrak{t}_3; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial v} = \frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\mathfrak{t}_2; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial w} = \frac{1}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\mathfrak{t}_3;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial u} = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial v}\mathfrak{t}_1; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial v} = -\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\mathfrak{t}_1 - \frac{1}{W}\frac{\partial V}{\partial w}\mathfrak{t}_3; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial w} = \frac{1}{V}\frac{\partial W}{\partial v}\mathfrak{t}_3;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial u} = \frac{1}{W}\frac{\partial U}{\partial w}\mathfrak{t}_1; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial v} = \frac{1}{W}\frac{\partial V}{\partial w}\mathfrak{t}_2; \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial w} = -\frac{1}{U}\frac{\partial W}{\partial u}\mathfrak{t}_1 - \frac{1}{V}\frac{\partial W}{\partial v}\mathfrak{t}_2.$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems brauchen nicht neu aufgestellt werden, sondern lassen sich durch Umschreiben des Systems (95) erhalten. Dabei tritt noch insofern eine Vereinfachung ein, als bei Einführung der Koeffizienten des Linienelements (96) je zwei der Gleichungen (95a) übereinstimmen. Man erhält demnach nur 3 Gleichungen von der Form[1]):

1) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. 1. Aufl., S. 485.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial w} - \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial w} = 0 \tag{99a}$$

und 3 Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{1}{W^2}\frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial V}{\partial w} = 0. \tag{99b}$$

Nur wenn U, V, W diesen 6 Bedingungen genügen, existiert ein dreifaches Orthogonalsystem mit dem vorgegebenen Linienelement:

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2.$$

Bei einzelnen in den Anwendungen auftretenden, besonders einfachen Fällen, wie Zylinder-, Kugel-, elliptischen Koordinaten sind die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen der Parameter u, v, w gegeben, mithin auch die Koeffizienten U, V, W. Dann sind die Integrabilitätsbedingungen (99) identisch erfüllt, also entbehrlich.

§ 6. Anwendungen auf Mechanik.

64. Freie Bewegung eines Massenpunktes. Wenn die freie Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluß einer Kraft zu untersuchen ist, führt man die Zeit t als den Parameter ein, von dem der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines Punktes der Bahnkurve des Massenpunktes abhängt. Man setzt also:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t);$$

dann wird die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Massenpunktes nach Ziff. 39 der Vekter

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{100}$$

und seine Beschleunigung der Vektor

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}. \tag{101}$$

Daß auch die wirkende Kraft $\mathfrak{K}$ eine Vektorgröße ist, wurde früher (Ziff. 2) unter der Annahme, daß der Satz vom Parallelogramm der Kräfte eine Erfahrungstatsache sei, aus den Elementen der Statik gefolgert. Das gleiche folgt aus Newtons Dynamischem Grundgesetz, das die Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung ausdrückt und wonach die Addition der Kräfte demselben Gesetz folgt wie die Addition der Beschleunigungen. Man ist also berechtigt, das dynamische Grundgesetz in der vektoriellen Form:

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{b} \tag{102}$$

zu schreiben, wobei m die Masse bedeutet und der Kraftvektor $\mathfrak{K}$ die Kraft nach Betrag K und Richtung beschreibt, ihre Angriffslinie aber nicht bestimmt.

Durch Einführung der Bewegungsgröße

$$\mathfrak{J} = m\mathfrak{v} \tag{103}$$

nimmt das dynamische Grundgesetz die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{K}; \tag{104}$$

hieraus folgt durch Integration zwischen zwei Zeiten t_1 und t_2 in der Ziff. 39 (3″) erklärten Weise der Impulssatz:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{K}\,dt = \mathfrak{J}(t_2) - \mathfrak{J}(t_1); \tag{104'}$$

hiernach ist die Zunahme der Bewegungsgröße in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ gleich dem Impuls der Kraft in dieser Zeit: $\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{K}\,dt$. Dieses Integral eines Vektors nach einem Parameter ist als Grenzwert einer Summe aufzufassen. — Vielfach wird die Bewegungsgröße $\mathfrak{J}$ selbst als Impuls bezeichnet; das soll auch im folgenden zugelassen werden.

Als Elementararbeit der Kraft bei Bewegung des Massenpunktes um das gerichtete Linienelement $d\mathfrak{r}$ ist das skalare Produkt $\mathfrak{K}\cdot d\mathfrak{r}$ aufzufassen. Dann ist die Arbeit, die die Kraft bei Bewegung des Massenpunktes zwischen zwei Punkten $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ der Bahn leistet:

$$A = \int_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2} \mathfrak{K}\cdot d\mathfrak{r}. \tag{105}$$

Dieses Linienintegral ist das Integral eines skalaren Differentials, das im allgemeinen aber kein exaktes Differential ist. Das Integral ist also nicht nur von den Grenzen abhängig, sondern auch von dem Weg, auf dem die Integration zwischen den Grenzen zu erstrecken ist, und erfordert also zu seiner Berechnung im allgemeinen die Kenntnis der Bahnkurve. Durch Einführung eines zur Darstellung der Bahnkurve geeigneten Parameters entsteht ein gewöhnliches Integral einer Funktion einer Veränderlichen.

Führt man insbesondere die Zeit als Parameter ein, so wird unter Verwendung des dynamischen Grundgesetzes (102) und von (100)

$$\int_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2} \mathfrak{K}\cdot d\mathfrak{r} = m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\mathfrak{v}\,dt = \frac{1}{2}\,m\int_{t_1}^{t_2} \frac{dv^2}{dt}\,dt;$$

durch Ausführung der Integration ergibt sich der Satz von der lebendigen Kraft;

$$A = \frac{1}{2} m v_2{}^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2 = T(t_2) - T(t_1), \tag{106}$$

wenn

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{107}$$

als lebendige Kraft (oder Bewegungsenergie) des bewegten Massenpunktes eingeführt und hier als Funktion der Zeit betrachtet wird. Die Zunahme der lebendigen Kraft ist gleich der von der wirkenden Kraft geleisteten Arbeit.

Schon früher (Ziff. 13) ist das Moment der Kraft:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} \tag{108}$$

eingeführt worden. Ebenso soll das Moment des Impulses:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{J} \tag{109}$$

gebildet und als Drehimpuls oder Drall bezeichnet werden.

Durch Differentiation von (109) nach der Zeit entsteht

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \times \mathfrak{J} + \mathfrak{r} \times \frac{d\mathfrak{J}}{dt};$$

hier verschwindet der erste Summand der rechten Seite, weil $\mathfrak{J} = m\mathfrak{v}$ zu $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ parallel ist. Nach (104) und (108) folgt die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{110}$$

oft als verallgemeinerter Flächensatz bezeichnet. Seine geometrische Bedeutung ergibt sich, wenn man nach (109) und (103)

$$\mathfrak{L} = m\mathfrak{r} \times \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

setzt. Die von dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ in der Zeit dt überstrichene Fläche ist, als Plangröße aufgefaßt,

$$d\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r}; \tag{111}$$

mithin ist die Flächengeschwindigkeit des Ortsvektors:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{1}{2} \mathfrak{r} \times \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\mathfrak{L}}{2m} \tag{111'}$$

und die Flächenbeschleunigung:

$$\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = \frac{1}{2m} \frac{d\mathfrak{L}}{dt}. \tag{111''}$$

Der verallgemeinerte Flächensatz läßt sich also in die Form:

$$\mathfrak{M} = 2m \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} \tag{112}$$

setzen und erscheint somit als ein Seitenstück zum dynamischen Grundgesetz, indem er die doppelte Flächenbeschleunigung zum Moment der Kraft in dieselbe Beziehung setzt wie dieses die Punktbeschleunigung zur Kraft.

Für verschwindendes Moment $\mathfrak{M} = 0$ erscheint der spezielle Flächensatz; nach (110) wird der Drall $\mathfrak{L} = \mathfrak{C}$ ein konstanter Vektor; nach (111') ergibt sich eine nach Betrag und Stellung im Raum konstante Flächengeschwindigkeit:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\mathfrak{C}}{2m}. \tag{113}$$

65. Dynamik des Punkthaufens. Bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems von n Massenpunkten (Punkthaufen) mit den Ortsvektoren $\mathfrak{r}_\nu$ und den Massen m_ν ($\nu = 1, 2, \cdots n$) spielt der Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt des Systems eine wichtige Rolle. Sein Ortsvektor ist

$$\mathfrak{r}_0 = \frac{\Sigma m_\nu \mathfrak{r}_\nu}{M}, \tag{114}$$

wo

$$M = \Sigma m_\nu$$

die Summe der Massen aller n Massenpunkte ist.

Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_0 = \frac{d^2\mathfrak{r}_0}{dt^2}$$

erhält man durch Differentiieren von (114), ausgedrückt durch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\mathfrak{v}_\nu = \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_\nu = \frac{d^2\mathfrak{r}_\nu}{dt^2}$$

der Punkte des Systems:

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{1}{M} \Sigma m_\nu \mathfrak{v}_\nu; \quad \mathfrak{b}_0 = \frac{1}{M} \Sigma m_\nu \mathfrak{b}_\nu. \tag{115}$$

Die letztere Gleichung, am besten in der Gestalt

$$M\mathfrak{b}_0 = \Sigma m_\nu \mathfrak{b}_\nu \tag{116}$$

geschrieben, besitzt eine dynamische Bedeutung:

Die Bewegung eines einzelnen Punktes des Systems folgt nach dem dynamischen Grundgesetz der Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\nu = m_\nu \mathfrak{b}_\nu; \tag{117}$$

dabei bedeutet $\mathfrak{K}_\nu$ die Resultante aller an dem νten Massenpunkt angreifenden Kräfte. Jede der Kräfte $\mathfrak{K}_\nu$ setzt sich aus äußeren Kräften zusammen, die von außen her auf die Systempunkte einwirken, und inneren Kräften, welche die Systempunkte aufein-

ander ausüben. Beides können eingeprägte Kräfte oder Reaktionskräfte sein. Von den inneren Kräften wird jedoch vorausgesetzt, daß sie paarweise in die Verbindungslinien je zweier Massenpunkte fallen und sich nach dem Gegenwirkungsprinzip gegenseitig aufheben. Setzt man also

$$\Sigma \mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K},$$

so ist diese Summe aller Kräfte identisch mit der Summe der äußeren Kräfte allein.

Summiert man jetzt alle Gleichungen (117) (für $\nu = 1, 2 \cdots n$), so folgt nach (116):

$$\mathfrak{K} = M \mathfrak{b}_0. \tag{118}$$

Diese Gleichung drückt den Schwerpunktssatz aus: Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und die Resultante aller äußeren Kräfte in ihm angreifen würde.

Führt man als Impuls des Systems die Summe der Impulse der Systempunkte ein:

$$\mathfrak{J} = \Sigma \mathfrak{J}_\nu = \Sigma m_\nu \mathfrak{v}_\nu,$$

so nimmt der Schwerpunktssatz nach (115) folgende Gestalt an:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{K}. \tag{119}$$

Als Impulsmoment (Drall) des Systems wird die Summe der Impulsmomente aller Systempunkte eingeführt:

$$\mathfrak{L} = \Sigma \mathfrak{L}_\nu = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{J}_\nu = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\mathfrak{r}_\nu}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiieren und nach (117):

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times m_\nu \frac{d^2\mathfrak{r}_\nu}{dt^2} = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{K}_\nu$$

oder wenn mit

$$\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{K}_\nu$$

das Moment der Resultierenden $\mathfrak{K}_\nu$ bezeichnet wird,

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \Sigma \mathfrak{M}_\nu.$$

Die auf der rechten Seite stehende Summe der Momente aller Kräfte setzt sich zusammen aus der Summe der Momente der äußeren und der der inneren Kräfte. Die letztere Summe ist Null, da die inneren Kräfte paarweise in die gleiche Angriffslinie fallen und entgegengesetzt gleich sind. Setzt man also

$$\Sigma \mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M},$$

so ist diese Summe der Momente aller Kräfte identisch mit der Summe der Momente der äußeren Kräfte allein.

Damit ergibt sich

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}; \tag{120}$$

diese Gleichung drückt den allgemeinen Flächensatz für Punktsysteme aus. Führt man nämlich mit

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu}{dt} = \frac{\mathfrak{L}_\nu}{2\,m_\nu}$$

die Flächengeschwindigkeiten der Ortsvektoren der einzelnen Massenpunkte ein und definiert durch die Gleichung

$$M\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = {}'\Sigma m_\nu \frac{d\mathfrak{F}_\nu}{dt}$$

eine resultierende Flächengeschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$, so folgt aus (120)

$$\mathfrak{M} = 2\,M\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} \tag{121}$$

als Zusammenhang zwischen der doppelten resultierenden Flächenbeschleunigung und dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte.

Für verschwindendes Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte erhält man den speziellen Flächensatz für den Punkthaufen. Nach (120) ist in diesem Fall das Impulsmoment des Systems konstant $\mathfrak{L} = \mathfrak{C}$; somit ist auch die resultierende Flächengeschwindigkeit konstant nach Betrag und Stellung im Raum.

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\mathfrak{C}}{2\,M}. \tag{122}$$

Die Ebene der resultierenden Flächengeschwindigkeit wird als invariable Ebene bezeichnet. Projiziert man die Bewegung senkrecht in eine beliebige Ebene, so ist auch die in diese Ebene fallende Komponente der Flächengeschwindigkeit konstant, aber von geringerem Betrag als die resultierende Flächengeschwindigkeit in der invariablen Ebene.

Die schon vielfach hervorgetretene Analogie der Dynamik des Punkthaufens zu der des einzelnen Massenpunktes läßt sich noch weiter ausbauen durch Aufstellung des Satzes von der lebendigen Kraft für den Punkthaufen. Bezeichnet man die Elementararbeit sämtlicher innerer und äußerer Kräfte in einem Zeitelement dt mit

$$dA = \Sigma dA_\nu = \Sigma \mathfrak{K}_\nu \cdot d\mathfrak{r}_\nu \tag{123}$$

und definiert man die lebendige Kraft T des Systems durch

$$T = \Sigma T_\nu = \frac{1}{2}\Sigma m_\nu v_\nu^2, \tag{124}$$

so erhält man für die zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 geleistete Arbeit nach (117):

$$A = \Sigma \int_{(t_1)}^{(t_2)} \mathfrak{K}_\nu \cdot d\mathfrak{r}_\nu = \Sigma m_\nu \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathfrak{v}_\nu}{dt} \cdot \mathfrak{v}_\nu dt = \frac{1}{2} \Sigma m_\nu \int_{t_1}^{t_2} \frac{d v_\nu^2}{dt} dt$$

oder

$$A = T(t_2) - T(t_1). \tag{125}$$

Der Zuwachs der lebendigen Kraft ist hier der von sämtlichen Kräften geleisteten Arbeit gleich; es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, daß auch die inneren Kräfte Arbeit leisten.

66. Der Schwerpunkt als Bezugspunkt. Die besondere Wichtigkeit, die der Schwerpunkt in der Dynamik des Punkthaufens besitzt, läßt es nützlich erscheinen, neben dem bisher verwendeten „festen" Bezugssystem ein zweites, bewegliches Bezugssystem mit dem Schwerpunkt als Anfangspunkt einzuführen. Sind wie bisher $\mathfrak{r}_\nu$ die von dem festen Anfangspunkt O ausgehenden Ortsvektoren der n Massenpunkte P_ν und $\mathfrak{r}_0$ der Ortsvektor ihres Schwerpunkts S, und bezeichnet man mit $\mathfrak{r}'_\nu$ die vom Schwerpunkt ausgehenden Ortsvektoren der Massenpunkte, so ist (Fig. 44)

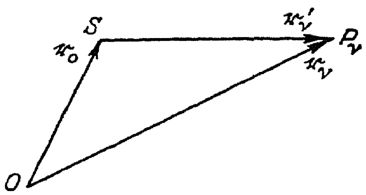


Fig. 44.

$$\mathfrak{r}'_\nu = \mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}_0. \tag{126a}$$

Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'_\nu = \frac{d\mathfrak{r}'_\nu}{dt}$ der Massenpunkte gegenüber dem Schwerpunkt ist

$$\mathfrak{v}'_\nu = \mathfrak{v}_\nu - \mathfrak{v}_0. \tag{126b}$$

Zufolge der Definition des Schwerpunktes (114) ist

$$\Sigma m_\nu \mathfrak{r}'_\nu = 0; \tag{127a}$$

hieraus folgt durch Differentiieren oder nach (115)

$$\Sigma m_\nu \mathfrak{v}'_\nu = 0. \tag{127b}$$

Es sollen jetzt das resultierende Moment der äußeren Kräfte und das Impulsmoment für den Schwerpunkt als Momentenpunkt berechnet werden. Das Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte ist:

$$\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{K}_\nu = \Sigma(\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}'_\nu) \times \mathfrak{K}_\nu$$

oder

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}', \tag{128}$$

wenn $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{K}$ das Moment der im Schwerpunkt angreifend gedachten Resultierenden der äußeren Kräfte, bezogen auf den

festen Anfangspunkt O, und $\mathfrak{M}' = \Sigma \mathfrak{r}'_\nu \times \mathfrak{K}_\nu$ das resultierende Moment der in den Massenpunkten P_ν angreifenden Kräfte, bezogen auf den Schwerpunkt als Momentenpunkt, ist. Letzteres ist damit nach (128) bestimmt.

Ähnlich wird das Impulsmoment des Systems:

$$\mathfrak{L} = \Sigma \mathfrak{r}_\nu \times m_\nu \mathfrak{v}_\nu$$

nach (126a, b):

$$\mathfrak{L} = \Sigma(\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}'_\nu) \times m_\nu(\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}'_\nu)$$
$$= \mathfrak{r}_0 \times M\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{r}_0 \times \Sigma m_\nu \mathfrak{v}'_\nu + \Sigma m_\nu \mathfrak{r}'_\nu \times \mathfrak{v}_0 + \Sigma \mathfrak{r}'_\nu \times m_\nu \mathfrak{v}'_\nu .$$

Von den 4 Summanden der rechten Seite verschwinden die beiden mittleren nach (127a, b); es ergibt sich:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}', \tag{129}$$

wenn $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{r}_0 \times M\mathfrak{v}_0$ das Impulsmoment des Schwerpunkts, bezogen auf den festen Momentenpunkt O, und $\mathfrak{L}' = \Sigma \mathfrak{r}'_\nu \times m_\nu \mathfrak{v}'_\nu$ das relative Impulsmoment des Punkthaufens, bezogen auf den Schwerpunkt als Momentenpunkt, bedeutet.

Nach (128) und (129) geht der allgemeine Flächensatz (120):

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}$$

über in

$$\frac{d\mathfrak{L}_0}{dt} + \frac{d\mathfrak{L}'}{dt} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}'. \tag{130}$$

Nun sagt aber der Schwerpunktsatz (119) aus, daß sich der Schwerpunkt nach denselben Gesetzen wie ein materieller Punkt bewegt; für ihn gilt also der Flächensatz in der Form:

$$\frac{d\mathfrak{L}_0}{dt} = \mathfrak{M}_0; \tag{131}$$

mithin ist nach (130) auch

$$\frac{d\mathfrak{L}'}{dt} = \mathfrak{M}'. \tag{132}$$

Der allgemeine Flächensatz für den Punkthaufen gilt also nach (132) auch, wenn als Momentenpunkt der bewegte Schwerpunkt eingeführt wird.

Die eben durchgeführte Zerlegung des Flächensatzes gewinnt an geometrischer Klarheit, wenn man die Impulsmomente durch Flächengeschwindigkeiten ersetzt. Bezeichnet man wie bisher die resultierende Flächengeschwindigkeit des Punkthaufens, bezogen auf O, mit:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\mathfrak{L}}{2M};$$

ferner die Flächengeschwindigkeit des Schwerpunkts mit:

$$\frac{d\mathfrak{F}_0}{dt} = \frac{\mathfrak{L}_0}{2M},$$

endlich die resultierende Flächengeschwindigkeit des Punkthaufens, bezogen auf den Schwerpunkt, mit:

$$\frac{d\mathfrak{F}'}{dt} = \frac{\mathfrak{L}'}{2M},$$

so ist nach (129)

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{d\mathfrak{F}_0}{dt} + \frac{d\mathfrak{F}'}{dt}. \tag{133}$$

Dann läßt sich der allgemeine Flächensatz (120):

$$\mathfrak{M} = 2M\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}$$

nach (131) und (132) zerlegen in:

$$\mathfrak{M}_0 = 2M\frac{d^2\mathfrak{F}_0}{dt^2} \tag{134}$$

und

$$\mathfrak{M}' = 2M\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dt^2}. \tag{135}$$

Es wird also die Flächenbeschleunigung des Schwerpunkts und die Flächenbeschleunigung der Bewegung um den Schwerpunkt herum hervorgebracht durch das Moment $\mathfrak{M}_0$ der am Schwerpunkt angreifenden Resultierenden bzw. durch das resultierende Moment der den Massenpunkten angreifenden Kräfte für den Schwerpunkt als Momentenpunkt.

Als Anwendung soll noch der spezielle Flächensatz für den bewegten Schwerpunkt als Momentenpunkt behandelt werden. Wenn das resultierende Moment $\mathfrak{M}$ verschwindet, ist das Impulsmoment $\mathfrak{L} = \mathfrak{C}$ konstant oder nach (129)

$$\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}' = \mathfrak{C} \tag{136}$$

konstant. Besonders interessant ist der Fall, daß auch die äußeren Kräfte oder mindestens ihre Resultierende $\mathfrak{K}$ verschwindet, was zum Verschwinden von $\mathfrak{M}$ keineswegs notwendig ist. Für ein solches freies System sagt der Schwerpunktsatz (118) aus, daß sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Bahn bewegt, daß also

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{v}_0 t$$

der Ortsvektor des Schwerpunkts ist, wenn $\mathfrak{a}$ seinen Ortsvektor zur Zeit $t = 0$ und $\mathfrak{v}_0$ seine konstante Geschwindigkeit bedeutet. Für den Schwerpunkt gilt dann selbst der spezielle Flächensatz in der Form:

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{r}_0 \times M\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{a} \times M\mathfrak{v}_0.$$

Nach (136) wird also

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{C} - \mathfrak{a} \times M\mathfrak{v}_0 \qquad (137)$$

das Impulsmoment des Systems für den Schwerpunkt als Momentenpunkt; es ist ebenfalls konstant, unterscheidet sich aber nach Größe und Richtung von dem Impulsmoment für den festen Momentenpunkt O.

Führt man nun in (133) neben der konstanten resultierenden Flächengeschwindigkeit (122) des Punkthaufens um O als Momentenpunkt:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\mathfrak{C}}{2M}$$

die ebenfalls konstante Flächengeschwindigkeit des Schwerpunkts ein:

$$\frac{d\mathfrak{F}_0}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{v}_0 = \frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}_0,$$

so folgt, daß die resultierende Flächengeschwindigkeit des Punkthaufens um den Schwerpunkt als Momentenpunkt ebenfalls konstant ist:

$$\frac{d\mathfrak{F}'}{dt} = \frac{\mathfrak{C}}{2M} - \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}_0}{2}. \qquad (138)$$

Es gibt also auch im bewegten System eine invariable Ebene, die aber eine andere Stellung im Raum besitzt als die im festen System; man wird ihr wegen ihrer Beziehung zu dem mit dem Punkthaufen invariant verbundenen Schwerpunkt eine größere Bedeutung beilegen als der invariablen Ebene für einen beliebig gewählten festen Momentenpunkt. —

In ganz ähnlicher Weise wie der allgemeine Flächensatz läßt sich der Satz von der lebendigen Kraft (125):

$$A = T(t_2) - T(t_1) \qquad (139)$$

umformen, wenn man den bewegten Schwerpunkt zum Ausgangspunkt der Ortsvektoren nimmt.

Führt man nach (126b)

$$\mathfrak{v}_\nu = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_\nu'$$

in die lebendige Kraft T ein, so wird

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m_\nu \mathfrak{v}_\nu \cdot \mathfrak{v}_\nu$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma m_\nu \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{v}_0 + \Sigma m_\nu \mathfrak{v}_\nu' \cdot \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2}\Sigma m_\nu \mathfrak{v}_\nu' \cdot \mathfrak{v}_\nu'.$$

Auf der rechten Seite verschwindet der mittlere Summand nach (127b). Der erste Summand:

$$T_0 = \frac{1}{2}\Sigma m_\nu \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{v}_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 \qquad (140)$$

ist die lebendige Kraft der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse. Der letzte Summand:

$$T' = \frac{1}{2} \Sigma m_\nu \mathfrak{v}'_\nu \cdot \mathfrak{v}'_\nu = \frac{1}{2} \Sigma m_\nu v'^2_\nu \tag{141}$$

ist die lebendige Kraft des Systems in seiner Bewegung relativ zum Schwerpunkt. Damit wird die lebendige Kraft zerlegt:

$$T = T_0 + T'. \tag{142}$$

In der gleichen Weise läßt sich die Elementararbeit zerlegen:

$$dA = \Sigma \mathfrak{K}_\nu \cdot d\mathfrak{r}_\nu = \Sigma \mathfrak{K}_\nu \cdot (d\mathfrak{r}_0 + d\mathfrak{r}'_\nu).$$

Führt man mit

$$dA_0 = \Sigma \mathfrak{K}_\nu \cdot d\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{r}_0 \tag{143}$$

die Arbeit der im Schwerpunkt angreifenden Resultierenden bei einer Bewegung des Schwerpunkts, ferner mit

$$dA' = \Sigma \mathfrak{K}_\nu \cdot d\mathfrak{r}'_\nu \tag{144}$$

die Arbeit der an den Massenpunkten angreifenden Kräfte bei einer relativen Bewegung gegenüber dem Schwerpunkt ein, so erhält man die Zerlegung der Elementararbeit:

$$dA = dA_0 + dA'. \tag{145}$$

Nun gilt für die Schwerpunktsbewegung, die sich in keiner Weise von der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unterscheidet, der Satz von der lebendigen Kraft. Es ist nämlich

$$dA_0 = \mathfrak{K} \cdot d\mathfrak{r}_0 = M \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} \cdot \mathfrak{v}_0 \, dt = \frac{1}{2} M d v_0{}^2 = d T_0;$$

hieraus folgt durch Integration:

$$A_0 = T_0(t_2) - T_0(t_1). \tag{146}$$

Dann gilt nach (139) der Satz von der lebendigen Kraft auch für die Bewegung um den Schwerpunkt herum:

$$A' = T'(t_2) - T'(t_1). \tag{147}$$

Die ganze Behandlung der Bewegung eines Punkthaufens durch Zerlegung in die Bewegung des Schwerpunkts und die Bewegung um den Schwerpunkt herum ist von besonderer Bedeutung für die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers. Dieser kann durch Grenzübergang aus dem Punkthaufen abgeleitet werden, dessen einzelne Punkte paarweise feste Entfernung besitzen und in dieser festen Entfernung durch

innere Kräfte gehalten werden, die man als Reaktionskräfte in Stäben von fester Länge einführt, welche die Punkte paarweise verbinden. Die Bewegung des starren Körpers wird später behandelt (Kap. 5, § 1).

67. Bewegung eines Massenpunktes auf einer Raumkurve. Bei der Untersuchung der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes in Ziff. 64 wurde vorausgesetzt, daß seine Bewegungsfreiheit im Raum durch keine Bedingungen eingeschränkt sei; dagegen war bereits bei der Untersuchung der Bewegung eines Punkthaufens die Möglichkeit zugelassen, daß sich unter den wirkenden Kräften Reaktionskräfte befinden, welche die Lage der einzelnen Punkte in jedem Zeitpunkt an eine geometrische Bedingung knüpfen und also ihre Bewegungsfreiheit einschränken.

Wir kehren nun zur Bewegung eines einzelnen Massenpunktes zurück und lassen beide Möglichkeiten offen, daß die Raumkurve, die er beschreibt, eine freie oder eine erzwungene Bahn sei. In letzterem Fall hindert die vorgeschriebene Bahn den Punkt, diejenige Bewegung auszuführen, die er unter dem Einfluß der auf ihn wirkenden äußeren Kraft $\mathfrak{K}$ allein ausführen würde; sie hindert ihn dadurch, daß bei der Bewegung auf der vorgeschriebenen Bahn eine Zusatzkraft $\mathfrak{P}$ auftritt, welche so bemessen ist, daß sie ihn gerade zum Durchlaufen der vorgeschriebenen Bahn zwingt. Man kann also die Bewegung dadurch zu einer freien machen, daß man die Zusatzkraft $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{K}$ hinzufügt. Ist die Bewegung auf der Bahn reibungslos, so kann man $\mathfrak{P}$ als normal zur Bahntangente annehmen.

Aus dem Ortsvektor eines Bahnpunktes $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ erhält man die Geschwindigkeit:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\mathfrak{t}; \tag{148}$$

dabei bedeutet $\mathfrak{t}$ wie früher den Einheitsvektor der Tangente, ds das Bogenelement der Kurve; $v = \frac{ds}{dt}$ den Betrag der Geschwindigkeit. Die Beschleunigung[1]) wird

$$\mathfrak{B} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + v\frac{d\mathfrak{t}}{dt}.$$

Dabei ist unter Verwendung der ersten Frenetschen Formel (19)

$$\frac{d\mathfrak{t}}{dt} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\mathfrak{n}}{\varrho}v,$$

1) Der Vektor der Beschleunigung $\mathfrak{B}$ ist in dieser und der nächsten Ziffer groß geschrieben, um Verwechslungen mit dem Binormalenvektor $\mathfrak{b}$ zu vermeiden.

also:

$$\mathfrak{B} = \frac{dv}{dt}\,\mathfrak{t} + \frac{v^2}{\varrho}\,\mathfrak{n}. \tag{149}$$

Damit ist die Beschleunigung in zwei Komponenten zerlegt, in die Bahnbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ in Richtung der Tangente und die Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ in Richtung der Hauptnormalen gegen den Krümmungsmittelpunkt zu. Eine Komponente in Richtung der Binormalen existiert nicht; der Vektor $\mathfrak{B}$ der Beschleunigung fällt in die Schmiegungsebene. Der Betrag b der Beschleunigung folgt aus

$$b^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}. \tag{149'}$$

Wir untersuchen nun die erzwungene Bewegung auf einer vorgegebenen Raumkurve unter dem Einfluß einer wirkenden Kraft $\mathfrak{K}$; dann gilt unter Hinzufügen einer Zusatzkraft $\mathfrak{P}$ nach dem dynamischen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

$$m\mathfrak{B} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}.$$

Die Maßzahlen der Komponenten von $\mathfrak{K}$ in Richtung $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ mögen $K_{\mathfrak{t}}$, $K_{\mathfrak{n}}$, $K_{\mathfrak{b}}$ heißen, die von $\mathfrak{P}$ ebenso $P_{\mathfrak{t}}$, $P_{\mathfrak{n}}$, $P_{\mathfrak{b}}$. Unter Voraussetzung reibungsloser Bewegung ist $P_{\mathfrak{t}} = 0$. Der bewegte Punkt übt selbst nach dem Reaktionsprinzip eine Reaktionskraft $\mathfrak{R} = -\mathfrak{P}$ auf die Bahn aus, die zwei von Null verschiedene Komponenten besitzt mit den Maßzahlen:

$$R_{\mathfrak{n}} = -P_{\mathfrak{n}}; \quad R_{\mathfrak{b}} = -P_{\mathfrak{b}}.$$

Jetzt ergeben sich die skalaren Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= K_{\mathfrak{t}}, \\ m\frac{v^2}{\varrho} &= K_{\mathfrak{n}} - R_{\mathfrak{n}}, \\ 0 &= K_{\mathfrak{b}} - R_{\mathfrak{b}}; \end{aligned} \tag{150}$$

sie reichen aus, um in jedem Punkt der Bahn bei vorgegebener Geschwindigkeit v die Bahnbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ und die Reaktionskraft zu berechnen.

In Richtung der Binormalen ist die vorhandene Komponente der äußeren Kraft zufolge $R_{\mathfrak{b}} = K_{\mathfrak{b}}$ gleich der Reaktionskraft; in Richtung der Hauptnormalen tritt nach

$$R_{\mathfrak{n}} = K_{\mathfrak{n}} - \frac{mv^2}{\varrho} \tag{151}$$

zur äußeren Kraft noch eine vom Mittelpunkt der ersten Krümmung weggerichtete Kraft $-\frac{m v^2}{\varrho}$ hinzu, die als Zentrifugalkraft bezeichnet wird.

68. Bewegung auf einer Fläche. In ganz ähnlicher Weise läßt sich die erzwungene Bewegung auf einer Fläche behandeln. Die Bewegung erfolgt in einer auf der Fläche liegenden, zunächst unbestimmten Raumkurve; für die Beschleunigung gilt also:

$$\mathfrak{B} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + \frac{v^2}{\varrho}\mathfrak{n}.$$

Nun hat man den Vektor $\mathfrak{n}$ der Hauptnormalen wie früher (Ziff. 45) in Richtung der Flächennormalen $\mathfrak{N}$ und der auf der Kurve senkrechten Flächentangente $\bar{\mathfrak{t}}$ zu zerlegen, wenn σ der Winkel der Schmiegungsebene mit der Tangentialebene ist:

$$\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{t}}\cos\sigma - \mathfrak{N}\sin\sigma.$$

Dann wird

$$\mathfrak{B} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + \frac{v^2}{\varrho}\cos\sigma\,\bar{\mathfrak{t}} - \frac{v^2}{\varrho}\sin\sigma\,\mathfrak{N}, \tag{152}$$

wofür noch

$$\mathfrak{B} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + N v^2 \operatorname{cotg}\sigma\,\bar{\mathfrak{t}} - N v^2 \mathfrak{N}$$

geschrieben werden kann, wenn man nach dem Meusnierschen Satz die Normalkrümmung (32) $N = \frac{\sin\sigma}{\varrho}$ einführt. Setzt man wieder nach dem dynamischen Grundgesetz

$$m\mathfrak{B} = \mathfrak{K} + \mathfrak{P}$$

und bezeichnet die Maßzahlen der Komponenten von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ in Richtung $\mathfrak{t}$, $\bar{\mathfrak{t}}$, $\mathfrak{N}$ durch die Indizes 1, 2, 3, so ist zunächst unter Voraussetzung reibungsloser Bewegung $P_1 = P_2 = 0$. Der bewegte Punkt übt auf die Fläche in Richtung der Normalen eine Reaktionskraft mit der Maßzahl $R = -P_3$ aus. Dann erhält man in Koordinaten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= K_1, \\ m v^2 N \operatorname{cotg}\sigma &= K_2, \\ -m v^2 N &= K_3 - R. \end{aligned} \tag{153}$$

Diese Gleichungen genügen, um in jedem Punkt der Bahn bei vorgegebener Geschwindigkeit v die Bahnbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$, die Neigung σ der Schmiegungsebene der Bahn gegen die Tangentialebene und die Reaktionskraft R in Richtung der Normalen zu berechnen. Letztere ist:

$$R = K_3 + m v^2 N. \tag{154}$$

Zur äußeren Kraft in dieser Richtung tritt die Zentrifugalkraft $mv^2\mathfrak{N}$; der Vorzeichenunterschied gegenüber (151) ist nur scheinbar, da definitionsgemäß bei einer positiv gekrümmten Fläche der Einheitsvektor der Flächennormalen vom Krümmungsmittelpunkt des Hauptschnitts weggerichtet ist.

Von Interesse ist die kräftefreie Bewegung auf der Fläche. Aus den beiden ersten Gleichungen (153) folgt in diesem Fall $\frac{dv}{dt} = 0$; $\operatorname{cotg} \sigma = 0$. Die letztere Bedingung sagt aus, daß die Schmiegungsebene der Bahn auf der Tangentialebene senkrecht steht, die Bahn also eine geodätische Linie ist. Auf dieser bewegt sich der Punkt der ersten Bedingung zufolge mit konstanter Geschwindigkeit.

69. Relativbewegung. Gegenüber einem als fest bezeichneten Raum, dessen Punkte auf ein Koordinatensystem $O\ (xyz)$ bezogen sind, bewege sich ein zweiter Raum mit einem Koordinatensystem $O'(x'y'z')$. Dieser bewegliche Raum, den man sich an einen starren Körper gebunden denken mag, soll das „Fahrzeug" genannt werden; und seine Bewegung gegenüber dem festen Raum, also die „Führung" des Fahrzeugs, soll bekannt sein. Die Bewegung eines Massenpunktes gegenüber dem beweglichen Raum, die ein auf dem Fahrzeug befindlicher Beobachter feststellen kann, heißt „relative Bewegung". Ein Beobachter im festen Raum wird die „absolute Bewegung" des Punktes gegenüber dem festen Raum feststellen können.

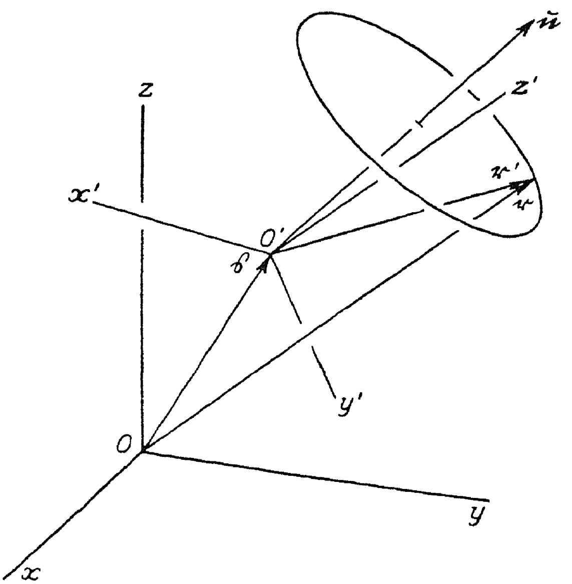


Fig. 45.

Wenn die Führung bekannt ist, läßt sich aus der relativen Bewegung die absolute Bewegung herleiten und umgekehrt. Für die Herleitung dieses Zusammenhangs sind die eingeführten Koordinatensysteme unwesentlich; sie sind zur Unterstützung der Vorstellung eingeführt (Fig. 45).

Ein Punkt P wird durch die Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ im festen Raum bzw. im Fahrzeug festgelegt. Die Bewegung eines gerade in P befindlichen Massenpunktes hängt nun in doppelter Weise von der Zeit ab:

1. dadurch, daß der Punkt P selbst, als Punkt des Fahrzeugs betrachtet, gegenüber dem festen Raum eine von der Führung des Fahrzeugs abhängige Führungsbewegung ausführt,

2. dadurch, daß der gerade in P befindliche Massenpunkt gegenüber dem Fahrzeug eine relative Bewegung ausführt.

Die zweite Bewegung, die Relativbewegung, beobachtet der Beobachter auf dem Fahrzeug als Funktion der Zeit t', die er auf einer auf dem Fahrzeug befindlichen Uhr abliest. Hingegen kann der Beobachter im festen Raum an der Hand einer Uhr, auf der er die Zeit t abliest, zweierlei beobachten, nämlich die Bewegung des Fahrzeugs als Ganzes, und die Absolutbewegung des Massenpunktes.

Zwischen den gleichzeitigen Angaben beider Uhren besteht, wenn sie nicht ohnehin gleich gehen, ein gesetzmäßiger Zusammenhang. Reduziert man die Angaben der bewegten Uhr auf die der festen, so ist t' als Funktion von t aufzufassen. Dann kann die totale zeitliche Änderung irgendeiner mit der Absolutbewegung zusammenhängenden Größe als Summe der partiellen Änderungen aufgefaßt werden, wenn sie als abhängig von der Relativbewegung gegenüber dem Fahrzeug und von der Führung des Fahrzeugs betrachtet wird:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{dt'}{dt}.$$

Setzt man dann beide Uhren als gleichgehend voraus, so ist $\frac{dt'}{dt} = 1$ zu setzen, und t' nach Ausführung der Differentiation durch t zu ersetzen. Also

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{155}$$

Es sollen jetzt die Geschwindigkeiten untersucht werden, die bei der Bewegung des Punktes P auftreten:
die Absolutgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{v}_a = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \tag{156}$$

für die Relativgeschwindigkeit ergibt sich vorläufig

$$\mathfrak{v}_r = \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t'}. \tag{157}$$

Um die Führungsgeschwindigkeit des Punktes P aufzustellen, soll festgesetzt werden, in welcher Weise sich das Fahrzeug bewegt. Ist $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor von O' im festen System, so ist $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$ die Geschwindigkeit, mit der sich O' dem festen System gegenüber bewegt. Das ganze Fahrzeug besitzt diese Translationsgeschwindigkeit $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t}$. Gleichzeitig soll das Fahrzeug gegenüber dem festen System eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ besitzen, infolge deren der Punkt P des Fahrzeugs die Tangentialgeschwindigkeit $\frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}'$ hat. Aus der Translations- und Tangentialgeschwindigkeit setzt sich die Führungsgeschwindigkeit des Punktes P zusammen

$$\mathfrak{v}_f = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}. \tag{158}$$

Nun läßt sich auch die Relativgeschwindigkeit noch umformen. Da der Ortsvektor im festen System:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}'$$

ist, und $\mathfrak{s}$ von t' nicht abhängt, ist $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t'} = \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t'}$; damit wird die Relativgeschwindigkeit (157)

$$\mathfrak{v}_r = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t'}. \tag{159}$$

Wendet man jetzt die Operation (155) auf $\mathfrak{r}$ an, so folgt

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t'} \tag{160}$$

oder nach (156) (158) und (159)

$$\mathfrak{v}_a = \mathfrak{v}_f + \mathfrak{v}_r. \tag{161}$$

Die Absolutgeschwindigkeit ist gleich der Summe aus Führungsgeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit. Dieser Zusammenhang ließe sich auch leicht durch eine geometrische Betrachtung erkennen, die aber zur Untersuchung des Zusammenhangs der Beschleunigungen wenig durchsichtig wird und deshalb nicht verwendet werden soll.

Von den bei der Bewegung des Punktes P auftretenden Beschleunigungen sind die am nächsten liegenden:
die Absolutbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_a = \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}, \tag{162}$$

die Relativbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_r = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t'^2}, \tag{163}$$

die Führungsbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_f = \frac{\partial \mathfrak{v}_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2}. \tag{164}$$

Wendet man die Operation (155) auf (160) an, so folgt:

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 2\,\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t\, \partial t'} + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t'^2}.$$

Die Absolutbeschleunigung ist also nicht gleich der Summe aus Führungs- und Relativbeschleunigung; vielmehr tritt noch ein Zusatzglied auf,

$$\mathfrak{b}_c = 2\,\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t\, \partial t'}, \tag{165}$$

das als Coriolisbeschleunigung bezeichnet wird. Damit ergibt sich

$$\mathfrak{b}_a = \mathfrak{b}_f + \mathfrak{b}_c + \mathfrak{b}_r. \tag{166}$$

Es sollen jetzt $\mathfrak{b}_f$ und $\mathfrak{b}_c$ genauer berechnet werden. Die Führungsgeschwindigkeit ist nach (158) bereits bekannt:

$$\mathfrak{v}_f = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}'; \tag{167}$$

hieraus ergibt sich:

$$\mathfrak{b}_f = \frac{\partial \mathfrak{v}_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \times \mathfrak{r}' + \mathfrak{u} \times \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t}. \tag{168}$$

Der erste Summand $\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}$ ist die Translationsbeschleunigung; der zweite Summand $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \times \mathfrak{r}'$ hängt von der Winkelbeschleunigung des Fahrzeugs ab; der dritte Summand ist die von der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ herrührende Zentripetalbeschleunigung. Es ist nämlich

$$\mathfrak{u} \times \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t} = \mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}'). \tag{169}$$

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ beschreibt P einen Kreis um $\mathfrak{u}$ als Achse (Fig. 46); die Tangentialgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{v}_t = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}';$$

ihr Betrag ist $v_t = u\varrho$, wenn u der Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und ϱ der Radius des Kreises ist. Dann ist $\mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}')$ ein Vektor, der von P nach dem Mittelpunkt des Kreises zu gerichtet ist; sein Betrag ist $u^2\varrho$ oder $\frac{v_t^2}{\varrho}$. Damit ist der dritte Summand als Zentripetalbeschleunigung erkannt.

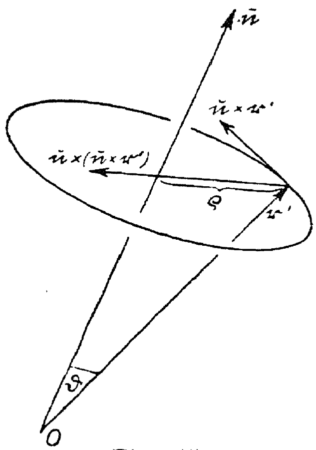


Fig. 46.

Die Coriolisbeschleunigung ist:

$$\mathfrak{b}_c = 2\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = 2\frac{\partial \mathfrak{v}_r}{\partial t'} = 2\mathfrak{u}\times\frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial t'} = 2\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}_r; \tag{170}$$

Sie verschwindet nur in drei Fällen: 1. für Punkte ohne Relativgeschwindigkeit, 2. bei reiner Translationsbewegung des Fahrzeugs, 3. für Punkte, deren Relativgeschwindigkeit der momentanen Drehachse parallel ist.

70. Die Scheinkräfte. Für einen Beobachter im bewegten System hat das Vorhandensein von Beschleunigungen, die sich seiner Beobachtung entziehen, nämlich der Führungs- und der Coriolisbeschleunigung, das Auftreten von Scheinkräften zur Folge. Ist $\mathfrak{K}$ die (im ruhenden System gegebene und gemessene) Kraft, die die Bewegung des Massenpunktes P bewirkt, so ist nach dem Dynamischen Grundgesetz

$$m\mathfrak{b}_a = \mathfrak{K}. \tag{171}$$

Der Beobachter im bewegten System erkennt nur die Relativbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_a - \mathfrak{b}_f - \mathfrak{b}_c;$$

für ihn bewegt sich der Massenpunkt nach (171) so, wie die Gleichung

$$m\mathfrak{b}_r = \mathfrak{K} - m\mathfrak{b}_f - m\mathfrak{b}_c$$

bestimmt. Das Dynamische Grundgesetz bleibt also für das bewegte System nur erhalten, wenn man

$$-m\mathfrak{b}_f = \mathfrak{K}_f \quad \text{und} \quad -m\mathfrak{b}_c = \mathfrak{K}_c \tag{172}$$

als zwei Zusatzkräfte betrachtet, die von der Bewegung des Systems herrühren; diese beiden Scheinkräfte werden als Führungskraft und Corioliskraft bezeichnet. Dann wird die Bewegungsgleichung im bewegten System:

$$m\mathfrak{b}_r = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}_f + \mathfrak{K}_c \tag{173}$$

oder kürzer

$$m\mathfrak{b}_r = \mathfrak{K}_r, \tag{173'}$$

wobei die für das bewegte System korrigierte Kraft $\mathfrak{K}_r$ aus der im festen System gegebenen Kraft durch Hinzufügung der Führungs- und Corioliskraft entsteht.

Die Führungskraft ist nach (168) und (169):

$$\mathfrak{K}_f = -m\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} - m\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}\times\mathfrak{r}' - m\mathfrak{u}\times(\mathfrak{u}\times\mathfrak{r}'); \tag{174}$$

ihr wichtigster Bestandteil ist die Zentrifugalkraft:

$$\mathfrak{K}_z = -m\mathfrak{u}\times(\mathfrak{u}\times\mathfrak{r}'), \tag{174'}$$

die nach Größe und Richtung vollständig mit der früheren ebenso bezeichneten Reaktionskraft übereinstimmt [vgl. Ziff. 67, 68], sich aber begrifflich nicht damit deckt. Die *Corioliskraft* ist:

$$\mathfrak{K}_c = -2m\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_r. \tag{175}$$

71. Lotabweichung eines fallenden Körpers. Als Fahrzeug soll die *rotierende Erde* betrachtet werden. Sieht man von ihrer fortschreitenden Bewegung ab, so kann als z-Achse des festen Koordinatensystems die Rotationsachse genommen werden und als x- und y-Achse 2 Gerade des festen Raumes in der Äquatorebene. Das Koordinatensystem x', y', z' des Fahrzeugs soll in einem bestimmten Moment mit dem absoluten zusammenfallen. Die z'-Achse des bewegten Systems fällt dauernd in die z-Achse. In die Achsenrichtungen des bewegten Systems werden die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gelegt.

Bei dieser Festsetzung beider Koordinatensysteme ist

$$\mathfrak{s} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}';$$

ferner ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} u,$$

wo $u = \frac{2\pi}{24^h}$ die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde ist.

Führt man im bewegten System Kugelkoordinaten r, λ, φ ein, so wird

$$\mathfrak{r}' = r(\mathfrak{i} \cos\lambda \cos\varphi + \mathfrak{j} \sin\lambda \cos\varphi + \mathfrak{k} \sin\varphi).$$

Es soll sich nun ein in der Meridianebene $\lambda = 0$ befindlicher Massenpunkt mit der Geschwindigkeit v_r auf den Erdmittelpunkt zu bewegen; seine Relativgeschwindigkeit ist

$$\mathfrak{v}_r = -v_r(\mathfrak{i} \cos\varphi + \mathfrak{k} \sin\varphi);$$

seine Führungsbeschleunigung ist die Zentripetalbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_f = \mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}') = -\mathfrak{i} u^2 r \cos\varphi;$$

seine Coriolisbeschleunigung

$$\mathfrak{b}_c = 2\mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_r = -2\mathfrak{j} u v_r \cos\varphi;$$

die Coriolisbeschleunigung ist nach Westen gerichtet.

Ein Beobachter auf der Erde beobachtet die Relativbeschleunigung:

$$\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_a - \mathfrak{b}_f - \mathfrak{b}_c;$$

er findet die aus der Gravitation folgende Schwere des fallenden Körpers verändert durch die *nach außen wirkende Zentrifugalkraft*

$$-m\mathfrak{b}_f = \mathfrak{i} m u^2 r \cos\varphi$$

und die *nach Osten gerichtete Corioliskraft*

$$-m\mathfrak{b}_c = 2\mathfrak{j} m u v_r \cos\varphi.$$

Kapitel 3. Theorie der Felder.

§ 1. Elemente der Theorie der Felder.

72. Definition des Begriffes: Feld. Ein unbegrenzter oder begrenzter Raum, dessen Punkten Zahlwerte gesetzmäßig zugeordnet sind, heißt ein skalares Feld. Ein Raum, dessen Punkten ein gesetzmäßig veränderlicher Vektor zugeordnet ist, heißt ein Vektorfeld. Die entsprechende Definition gilt für ein Tensorfeld zweiter oder höherer Stufe.

Die die gesetzmäßige Zuordnung bestimmende Funktion heißt Feldfunktion. Sie wird in der Umgebung eines Punktes im allgemeinen als eindeutig, stetig und differentiierbar vorausgesetzt.

Physikalische Beispiele für skalare Felder sind die Verteilung einer Temperatur oder eines Potentials im Raum, für Vektorfelder die Kraft- und Strömungsfelder, für Tensorfelder 2. Stufe die Deformations- und Spannungsfelder.

Ein Punkt des Feldes wird Aufpunkt genannt und oft einfach durch Angabe seines Ortsvektors bezeichnet.

73. Skalares Feld. Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems soll die Feldfunktion mit $V(x, y, z)$ bezeichnet werden. Alle Punkte, für die die Feldfunktion einen festen Wert c besitzt, erfüllen eine Fläche

$$V(x, y, z) = c. \tag{1}$$

Gibt man c verschiedene Werte, so entsteht eine Flächenschar, die Schar der Niveauflächen des skalaren Feldes. Beispiele sind die Isothermenflächen einer Temperatur-Verteilung oder die Potentialflächen.

Beim Fortschreiten von einem Aufpunkt $P(x, y, z)$ zu einem benachbarten Punkt $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ der gleichen Niveaufläche ist die Änderung der Feldfunktion Null. Es soll nun allgemeiner die Änderung dV der Feldfunktion V untersucht werden, wenn man von einem Aufpunkt P mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$$

zu einem beliebigen benachbarten Aufpunkt P' mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}(x + dx) + \mathfrak{j}(y + dy) + \mathfrak{k}(z + dz)$$

übergeht. Dann ist

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \tag{2}$$

im allgemeinen von Null verschieden. dV kann in die Form eines skalaren Produkts gesetzt werden:

$$dV = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot(\mathfrak{i}dx + \mathfrak{j}dy + \mathfrak{k}dz); \tag{3}$$

dessen zweiter Faktor ist der infinitesimale Vektor

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\,dx + \mathfrak{j}\,dy + \mathfrak{k}\,dz,$$

der von P nach P' führt. Der erste Faktor ist nur vom Ort P abhängig, nicht von einem bestimmten Nachbarpunkt P', und heißt der Gradient des Feldes im Punkt P.

Man schreibt

$$\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z} = \operatorname{grad} V, \tag{4}$$

also

$$dV = \operatorname{grad} V \cdot d\mathfrak{r}.$$

Für das Rechnen ist die von Hamilton eingeführte Bezeichnung

$$\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z} = \nabla V \tag{5}$$

zweckmäßiger. Setzt man

$$\nabla V = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) V,$$

so ist ∇ (gelesen Nabla) das Symbol für den Lückenausdruck

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5'}$$

Dieser Ausdruck ist ein formaler Vektor, der zugleich die Ausführung einer Differentiation an einer nachfolgenden Funktion verlangt. Unter Einführung dieser Bezeichnung wird

$$dV = \nabla V \cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} \cdot \nabla V \tag{6}$$

die gesuchte Änderung der Feldfunktion.

74. Gradient. Der Gradient ∇V ist jedem Punkt des skalaren Feldes eindeutig zugeordnet und bestimmt ein Vektorfeld. Für jede in die Niveaufläche fallende infinitesimale Fortschreitung $d\mathfrak{r}$ verschwindet dV. Also ist nach (6) der Gradient ∇V ein Vektor, der in die Normalenrichtung der Niveaufläche fällt. Schreitet man von einem Punkt einer Fläche mit dem Feldwert V in Richtung der Normalen um $d\mathfrak{r}$ zu einer Fläche höheren Niveaus $V + dV$ fort, setzt also $dV > 0$, so muß nach (6) ∇V zu $d\mathfrak{r}$ gleichsinnig sein.

Der Gradient geht also in Richtung der Normalen von einer Fläche niedrigeren zu einer Fläche höheren Niveaus und unterscheidet sich dem Richtungssinn nach von dem in der Physik vielfach gebrauchten Gefälle.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor der Normalen in Richtung der wachsenden V und setzt

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{n}\, dn,$$

so wird nach (6):

$$dV = \mathfrak{n} \cdot \nabla V dn = |\nabla V|\, dn. \tag{7}$$

Der Betrag des Gradienten ist

$$|\nabla V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{dV}{dn}. \tag{8}$$

Denkt man sich das Feld erfüllt von Niveauflächen von gleicher infinitesimaler Niveaudifferenz dV, so ist der Betrag des Gradienten an jeder Stelle des Feldes dem Abstand dn benachbarter Niveauflächen umgekehrt proportional und ein Maß für die Dichtigkeit der Niveauflächen des Feldes.

Aus dem geometrischen Sinn des Gradienten folgt seine Unabhängigkeit vom Koordinatensystem. Der Gradient ist eine Invariante. Auch der Lückenausdruck (5′) besitzt infolgedessen Invariantencharakter. Ein formaler Beweis hierfür wird später nachgebracht. (Kap. 6, Ziff. 225.)

Die Orthogonaltrajektorien der Niveauflächen bezeichnet man als Feldlinien. Die Tangente einer Feldlinie fällt an jeder Stelle in die Richtung des Gradienten. Die Bestimmung der Feldlinien hängt von der Integration der Gleichung

$$d\mathfrak{r} \times \nabla V = 0 \tag{9}$$

ab, die durch das simultane System

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

ersetzt werden kann.

75. Richtungsdifferentialquotient einer skalaren Feldfunktion. Bei einer Verschiebung des Aufpunkts um $d\mathfrak{r}$ erfährt die Feldfunktion V nach (6) eine Änderung

$$dV = d\mathfrak{r} \cdot \nabla V.$$

Nach Einführung des formalen Vektors ∇ kann man das formale skalare Produkt $(d\mathfrak{r} \cdot \nabla)$ als ein Symbol auffassen, das die Ausführung einer skalaren Differential-Operation verlangt, und

$$dV = (d\mathfrak{r} \cdot \nabla) V \tag{10}$$

schreiben. Setzt man $d\mathfrak{r} = ds\mathfrak{t}$ als Produkt aus Betrag und Einheitsvektor an, so wird

$$dV = ds(\mathfrak{t}\cdot\nabla)V.$$

Man bezeichnet

$$\frac{dV}{ds} = (\mathfrak{t}\cdot\nabla)V = \mathfrak{t}\cdot\nabla V \tag{11}$$

als Richtungsdifferentialquotient von V.

Um eine Richtungsdifferentiation in rechtwinkligen Koordinaten auszuführen, setzen wir (nach Ziff. 8)

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma.$$

Dann wird

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

also

$$\frac{dV}{ds} = \cos\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial V}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{12}$$

In Richtung der Normalen der Niveauflächen ergibt sich der Höchstbetrag für den Richtungsdifferentialquotienten:

$$\frac{dV}{dn} = \mathfrak{n}\cdot\nabla V = \cos(nx)\frac{\partial V}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial V}{\partial y} + \cos(nz)\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{13}$$

wenn $(nx)\cdots$ den Winkel der positiven Normalen gegen die $x\cdots$ Achse bezeichnet.

Wenn Richtungsdifferentialquotienten nach verschiedenen Richtungen auseinander zu halten sind, empfiehlt sich die Verwendung der Zeichen für partielle Differentiation:

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1\cdot\nabla V; \quad \frac{\partial V}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2\cdot\nabla V.$$

Von einem gewöhnlichen Differentialquotient unterscheidet sich ein Richtungsdifferentialquotient dadurch, daß ds eine lineare Differentialform, nicht aber das Differential einer Funktion s ist. Eine solche existiert nicht, insofern $\int_{(1)}^{(2)} ds$ als Grenzwert einer Summe betrachtet nicht allein von den Endpunkten P_1 und P_2, sondern auch von dem von P_1 nach P_2 führenden Weg abhängt. Die in der natürlichen Geometrie der Kurven (Ziff. 42) auftretenden Differentialquotienten einer Ortsfunktion auf der Kurve nach der Bogenlänge der Kurve sind noch gewöhnliche Differentialquotienten; dagegen sind die in der natürlichen Geometrie der Flächen (Ziff. 57) vorkommenden Differentialquotienten nach den Bogenlängen zweier Scharen von Parameterkurven als Richtungs-

differentialquotienten anzusprechen, da diese Bogenlängen nur auf je einer Einzelkurve, nicht aber allgemein auf der Fläche als Funktion der Endpunkte definierbar sind.

76. Vektorfeld. Eine vektorielle Feldfunktion kann in der Gestalt

$$\mathfrak{v}(x,y,z) = \mathfrak{i}u(x,y,z) + \mathfrak{j}v(x,y,z) + \mathfrak{k}w(x,y,z) \tag{14}$$

mittels dreier skalarer Feldfunktionen u, v, w aufgebaut werden. Als einfaches Beispiel einer vektoriellen Feldfunktion ist der Gradient einer skalaren Feldfunktion bereits aufgetreten (4)

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} V = \mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wie im Gradientenfeld bezeichnet man in jedem Vektorfeld als Feldlinien diejenigen Kurven, deren Richtung in jedem ihrer Punkte mit der Richtung des Feldvektors zusammenfällt. Sie genügen der Gleichung

$$d\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = 0, \tag{15}$$

die dem simultanen System

$$dx : dy : dz = u : v : w \tag{15'}$$

gleichwertig ist.

77. Richtungsdifferentialquotient einer vektoriellen Feldfunktion. Die Änderung des Feldvektors $\mathfrak{v}$ beim Fortschreiten von einem Aufpunkt P mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$ zu einem benachbarten Aufpunkt P' mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ ist

$$d\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}dz;$$

$d\mathfrak{v}$ kann unter Verwendung des infinitesimalen Vektors $d\mathfrak{r}$ in folgender Weise geschrieben werden:

$$d\mathfrak{v} = (\mathfrak{i}dx + \mathfrak{j}dy + \mathfrak{k}dz)\cdot\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{v};$$

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}. \tag{16}$$

Die Änderung einer vektoriellen Feldgröße bei einer Verschiebung des Aufpunktes ergibt sich wie die Änderung einer skalaren Feldgröße durch Anwendung des skalaren Operators $d\mathfrak{r}\cdot\nabla$.

Schreibt man jedoch [vgl. Ziff. 30, (80)]

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot(\nabla\mathfrak{v}), \tag{16'}$$

so erscheint die Änderung der vektoriellen Feldgröße als skalares Produkt aus der Änderung des Ortsvektors und einem nur vom Ort, nicht von der Richtung abhängigen Faktor, der lokalen Dyade $\nabla\mathfrak{v}$.

Als Richtungsdifferentialquotient der vektoriellen Feldfunktion $\mathfrak{v}$ wird

$$\frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{v} = (\mathfrak{t} \cdot \nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{t} \cdot (\nabla \mathfrak{v}) \tag{17}$$

bezeichnet, wenn wieder $d\mathfrak{r} = ds\,\mathfrak{t}$ gesetzt wird.

78. Tensorfelder. In der gleichen Weise, wie sich die Richtungsdifferentiation einer skalaren Feldgröße und einer vektoriellen Feldgröße herleiten ließ, kann man die Richtungsdifferentiation einer tensoriellen Feldgröße beliebig hoher Stufe erhalten. Entsprechend (16) und (17) erhält man für das Richtungsdifferential und den Richtungsdifferentialquotient einer Feldgröße Φ:

$$d\Phi = d\mathfrak{r} \cdot \nabla \Phi; \tag{18a}$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \mathfrak{t} \cdot \nabla \Phi. \tag{18b}$$

Dabei kann man in letzterer Formel die rechte Seite wieder entstanden denken durch Anwendung des skalaren Operators $(\mathfrak{t} \cdot \nabla)$ auf die Feldfunktion; oder aber man kann die rechte Seite auffassen als skalares Produkt des Einheitsvektors $\mathfrak{t}$ der Differentiationsrichtung mit einem lokalen Tensor $\nabla \Phi$ nächst höherer Stufe.

79. Invarianten eines Vektorfeldes: Divergenz und Rotation. Da der formale Vektor ∇ ebenso wie ein wirklicher Vektor Invariantencharakter hat, besitzen alle aus ∇ und einem Vektor gebildeten Produkte ebenso wie die Produkte zweier wirklicher Vektoren einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn.

Neben der bereits eingeführten lokalen Dyade eines Vektorfeldes $\mathfrak{v}(x, y, z)$ lassen sich weitere Invarianten durch Produktbildungen herstellen, deren wichtigste als Divergenz und Rotation bezeichnet werden.

Divergenz von $\mathfrak{v}$ nennt man das skalare Produkt von ∇ mit der Feldfunktion $\mathfrak{v}$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \cdot \mathfrak{v} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w) \tag{19}$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{19'}$$

Als Rotation von $\mathfrak{v}$ bezeichnet man das Vektorprodukt von ∇ mit der Feldfunktion $\mathfrak{v}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v} &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w) \\ &= \mathfrak{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Ebenso wie das Vektorprodukt zweier Vektoren kann auch $\nabla \times \mathfrak{v}$ in die Form einer Determinante gesetzt werden:

$$\nabla \times \mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Bei der Berechnung dieser Determinante sind die formalen Produkte der Elemente der zweiten und dritten Zeile durch Differentialquotienten zu ersetzen.

§ 2. Formale ∇-Rechnung.

80. Differentiation von Summen und Produkten. Für das Operationssymbol ∇ gilt wegen seines linearen Aufbaus das distributive Gesetz; es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \nabla(u+v) &= \nabla u + \nabla v, \\ \nabla\cdot(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) &= \nabla\cdot\mathfrak{u} + \nabla\cdot\mathfrak{v}, \\ \nabla\times(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) &= \nabla\times\mathfrak{u} + \nabla\times\mathfrak{v}; \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

oder unter Verwendung der Bezeichnungen grad, div, rot:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}(u+v) &= \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{div}(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) &= \operatorname{div}\mathfrak{u} + \operatorname{div}\mathfrak{v}, \\ \operatorname{rot}(\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) &= \operatorname{rot}\mathfrak{u} + \operatorname{rot}\mathfrak{v}. \end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

Wenn das Operationssymbol ∇ mit irgendeiner vorgeschriebenen Art der Multiplikation auf ein Produkt von zwei (skalaren oder extensiven) Faktoren angewendet werden soll, so muß es, was die Differentiation betrifft, auf jeden Faktor des Produktes zur Anwendung kommen. Es gilt zunächst also für jede Art der Multiplikation

$$\nabla(\alpha\beta) = \nabla \overset{\downarrow}{\alpha}\beta + \nabla \alpha\overset{\downarrow}{\beta}.$$

Hier kennzeichnen die Pfeile vorübergehend die Faktoren, die differentiiert werden sollen. Es ist dann in jedem Falle jedes der entstandenen Produkte daraufhin zu untersuchen, in welcher Weise die Faktoren vertauscht werden dürfen, damit ∇ neben den Faktor zu stehen kommt, der zu differentiieren ist.

Ein s k a l a r e r Faktor, der zwischen ∇ und dem zu differentiierenden Faktor steht, kann auf die andere Seite von ∇ gestellt werden:

$$\nabla u \overset{\downarrow}{\beta} = u \nabla \overset{\downarrow}{\beta}$$

Er kann auch auf die andere Seite eines etwa vorhandenen Multiplikationszeichens gestellt werden; z. B.

$$\nabla \cdot u \overset{\downarrow}{\beta} = \nabla u \cdot \overset{\downarrow}{\beta} = u \nabla \cdot \overset{\downarrow}{\beta}.$$

Um die Verwendung von Klammern und Pfeilen möglichst zu beschränken, wird folgende Festsetzung getroffen: die durch ∇ vorgeschriebene Differentiation erstreckt sich im allgemeinen[1]) auf alle rechts von ∇ stehenden Faktoren, auch wenn diese nicht durch eine Klammer zusammengefaßt sind. Soll nur ein Teil der Faktoren und zwar die ∇ zunächst stehenden differentiiert werden, so werden diese Faktoren mit ∇ durch eine Klammer zusammengeschlossen.

So ist z. B.

$$\nabla (uv) = \nabla \overset{\downarrow}{u} v + \nabla u \overset{\downarrow}{v},$$

also

$$\nabla uv = (\nabla u)\, v + u \nabla v, \tag{II}$$

oder

$$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \tag{II'}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot u\mathfrak{v} &= (\nabla u) \cdot \mathfrak{v} + u \nabla \cdot \mathfrak{v}, \\ \nabla \times u\mathfrak{v} &= (\nabla u) \times \mathfrak{v} + u \nabla \times \mathfrak{v}; \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathfrak{v}) &= \operatorname{grad} u \cdot \mathfrak{v} + u \operatorname{div} \mathfrak{v}, \\ \operatorname{rot}(u\mathfrak{v}) &= \operatorname{grad} u \times \mathfrak{v} + u \operatorname{rot} \mathfrak{v}. \end{aligned}\right\} \tag{III'}$$

Bei der Differentiation eines Produktes von vektoriellen Faktoren darf ein vektorieller Faktor im allgemeinen weder auf die andere Seite von ∇, noch auf die andere Seite des Multiplikationszeichens gestellt werden. Dagegen kann der zu differentiierende Faktor mit dem fest bleibenden Faktor vertauscht werden, wenn es die Gesetze der verwendeten Multiplikation zulassen.

So ist

$$\nabla (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}) = \nabla \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}} \cdot \mathfrak{v} + \nabla \mathfrak{u} \cdot \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} = (\nabla \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{v} + (\nabla \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{u}. \tag{IV}$$

Die rechte Seite läßt eine bemerkenswerte Umformung zu, durch die die lokalen Dyaden $\nabla \mathfrak{u}$ und $\nabla \mathfrak{v}$ vermieden werden können. Nach dem Entwicklungssatz gilt die Identität

$$\mathfrak{u} \times (\nabla \times \mathfrak{v}) = \nabla \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{u} \cdot \nabla \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}$$

oder

$$(\nabla \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{u} \times (\nabla \times \mathfrak{v}).$$

Ebenso:

$$(\nabla \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{u} + \mathfrak{v} \times (\nabla \times \mathfrak{u}).$$

---

1) Von dieser Festsetzung wird später manchmal abgewichen, wenn kein Irrtum entstehen kann.

Damit wird (IV)

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{u} + \mathfrak{u}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{u}. \qquad (\mathrm{IV}')$$

Die beiden ersten Summanden $\mathfrak{u}\cdot\nabla\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{u}$ sind im wesentlichen Richtungsdifferentialquotienten.

Durch ähnliche Umformungen findet man

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}) &= \mathfrak{v}\cdot\nabla\times\mathfrak{u} - \mathfrak{u}\cdot\nabla\times\mathfrak{v};\\ \nabla\times(\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}) &= \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{u} - \mathfrak{u}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{u}\,\nabla\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\,\nabla\cdot\mathfrak{u};\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{V})$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}) &= \mathfrak{v}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{u} - \mathfrak{u}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v}.\\ \operatorname{rot}(\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}) &= \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{u} - \mathfrak{u}\cdot\nabla\mathfrak{v} + \mathfrak{u}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{u}.\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{V}')$$

Zu ähnlichen Formeln geben die mehrfachen Produkte Veranlassung.

Eine Gleichung, die später gebraucht wird, soll noch angegeben werden. Ersetzt man in dem vierfachen Produkt:

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}) = \begin{vmatrix}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C} & \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}\\ \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} & \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{D}\end{vmatrix} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{A}$$

den dritten Faktor $\mathfrak{C}$ durch ∇ und differentiiert nur den vierten Faktor, der an Stelle von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden soll, so folgt

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\cdot(\nabla\times\mathfrak{v}) = \mathfrak{A}\cdot(\nabla\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\cdot(\nabla\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{A}. \qquad (\mathrm{VI})$$

81. Doppel-∇. Bei zweimaliger Anwendung des Operators ∇ auf eine Feldfunktion gelten eine Reihe von bemerkenswerten Beziehungen.

Wir bilden

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad}V &= \nabla\cdot\nabla V\\ &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V\\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V\end{aligned}$$

und bemerken, daß $\nabla\cdot\nabla$ als Symbol einer skalaren Operation aufgefaßt werden kann. Man setzt

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$$

und bezeichnet $\triangle$ als Laplaceschen Operator. Er ist auf vektorielle und tensorielle Feldgrößen ebenso anwendbar wie auf skalare; also

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla V &= \operatorname{div}\operatorname{grad}V = \triangle V\\ \nabla\cdot\nabla\mathfrak{v} &= \triangle\mathfrak{v};\quad \nabla\cdot\nabla\Phi = \triangle\Phi.\end{aligned}\right\}(\mathrm{VII})$$

Die Anwendung von $\triangle$ auf ein Produkt zweier skalarer Faktoren gibt nach (II) und (III)

$$\triangle(uv) = u\triangle v + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\triangle u. \qquad \text{(VII')}$$

Bildet man in ähnlicher Weise

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} = \nabla\nabla\cdot\mathfrak{v} = \nabla^2\cdot\mathfrak{v}, \qquad \text{(VIII)}$$

so kann

$$\nabla^2 = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}$$
$$+ \mathfrak{j}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathfrak{j}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

als eine formale Dyade aufgefaßt werden, die die Ausführung einer Differentiation zweiter Ordnung an einer nachfolgenden Feldfunktion verlangt.

Von besonderer Wichtigkeit sind folgende Identitäten:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}V = \nabla\times\nabla V = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \nabla\cdot\nabla\times\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(X)}$$

Endlich ist nach dem Entwicklungssatz

$$\nabla\times(\nabla\times\mathfrak{v}) = \nabla\nabla\cdot\mathfrak{v} - \nabla\cdot\nabla\mathfrak{v}$$

oder

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \triangle\mathfrak{v}. \qquad \text{(XI)}$$

82. Formeln für den Ortsvektor. Eine Reihe von Formeln, die sich durch Anwendung von ∇ auf den Ortsvektor $\mathfrak{r}$, der vom Anfangspunkt O nach einen Aufpunkt P führt, und seinen Betrag r ergeben, sind wegen ihres häufigen Auftretens von Wichtigkeit. Unter Verwendung rechtwinkliger Koordinaten, die wegen der Invarianz von ∇ ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässig ist, ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Durch Differentiation von

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

nach x erhält man

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r};$$

entsprechend für y und z.

Dann wird nach (4), (5)

$$\operatorname{grad} r = \nabla r = \frac{\mathfrak{r}}{r} = \mathfrak{e}. \tag{22}$$

Dabei ist $\mathfrak{e}$ der in die Richtung des Ortsvektors fallende, vom Anfangspunkt O gegen den Aufpunkt P zu gerichtete Einheitsvektor (Fig. 47). Ähnlich wird (für beliebigen Exponent k)

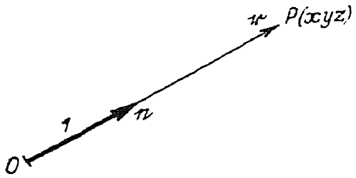


Fig. 47.

$$\nabla r^k = k r^{k-1} \nabla r = k r^{k-1} \mathfrak{e}; \tag{23}$$

insbesondere

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{-1}{r^2} \mathfrak{e} = \frac{-\mathfrak{r}}{r^3}. \tag{23'}$$

Ferner wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{r} = \nabla \cdot \mathfrak{r} = 3; \tag{24a}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{r} = \nabla \times \mathfrak{r} = 0. \tag{24b}$$

Weiter ist:

$$\nabla \mathfrak{r} = I \tag{24c}$$

die Einheitsdyade (Ziff. 33); infolgedessen ist jeder Richtungsdifferentialquotient von $\mathfrak{r}$ dem Einheitsvektor der Richtung selbst gleich [vgl. (17)]:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{r} = \mathfrak{t}. \tag{24d}$$

Endlich ist, bei Anwendung von Doppel-∇, noch eine Gleichung von großer Wichtigkeit. Es ist nach (23′) für nicht verschwindendes r

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = - \nabla \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^3}.$$

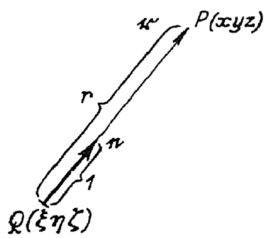


Fig. 48.

Nach (III) ist,

$$\nabla \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \left(\nabla \frac{1}{r^3}\right) \cdot \mathfrak{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathfrak{r};$$

also nach (23) und (24a)

$$\nabla \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = -3 \frac{\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{r}}{r^4} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Mithin genügt $\frac{1}{r}$ der Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \triangle \frac{1}{r} = 0 \tag{25}$$

(Laplacesche Gleichung) in allen Punkten des Raumes außer im Anfangspunkt $\mathfrak{r} = 0$.

Wenn der Vektor $\mathfrak{r}$ nicht vom Anfangspunkt O, sondern von einem beliebigen Raumpunkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ aus nach einem Aufpunkt $P(x, y, z)$ führt (Fig. 48), lassen sich alle Differentialformeln für $\mathfrak{r}$ unverändert übertragen, wenn Q fest und P veränderlich gedacht wird,

also die Differentiationen im Punkt P ausgeführt werden. Es ist nämlich dann

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}(x-\xi) + \mathfrak{j}(y-\eta) + \mathfrak{k}(z-\zeta);$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r};$$

also

$$\operatorname{grad} r = \nabla r = \frac{\mathfrak{r}}{r} = \mathfrak{e}; \tag{26}$$
$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{e}}{r^2}; \quad \text{usw.} \tag{27}$$

Es ist jedoch nicht zu übersehen, daß auch der Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ veränderlich gedacht werden kann; führt man die Differentiationen in Q aus, so ist

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{x-\xi}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x}; \quad \text{usw.};$$

es ändern alle ersten Differentialquotienten das Vorzeichen. Man muß, um Verwechslungen zu vermeiden, den Punkt, in dem differentiiert wird, bezeichnen, etwa durch ∇_P, bzw. ∇_Q. Dann wird

$$\nabla_Q r = -\nabla_P r \quad \text{usw.} \tag{28}$$

Nur wenn keine Verwechslung möglich ist, soll bei Differentiation im Aufpunkt das Weglassen der Bezeichnung gestattet sein, also ∇ für ∇_P gesetzt werden können.

§ 3. Divergenz.

83. Quelldichte. Der Feldvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w$ soll als Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit von unveränderlicher Dichte ϱ (inkompressible Flüssigkeit) gedeutet werden.

Eine Stelle in der Strömung, an der Flüssigkeit neu hinzutritt, heißt Quelle; eine Stelle, an der Flüssigkeit verschwindet, wird als Senke oder negative Quelle bezeichnet. Quellen können punktförmig oder kontinuierlich ausgebreitet sein. Als Ergiebigkeit einer Quelle bezeichnet man die Flüssigkeitsmenge, die sie in der Zeiteinheit liefert. Sind Quellen kontinuierlich ausgebreitet, so wird die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit als Dichte der Ergiebigkeit oder kurz Quelldichte bezeichnet; sie stellt für eine endliche Volumeinheit nur einen Mittelwert dar; durch Grenzübergang gelangt man zur Quelldichte e in einem Punkt des Feldes. —

Die Gesamtergiebigkeit der in einem endlichen Gebiet enthaltenen Quellen ist gleich dem Überschuß der durch die Begrenzung austretenden über die eintretende Flüssigkeitsmenge. Diese physikalische Tatsache soll zunächst für ein Elementarvolumen

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

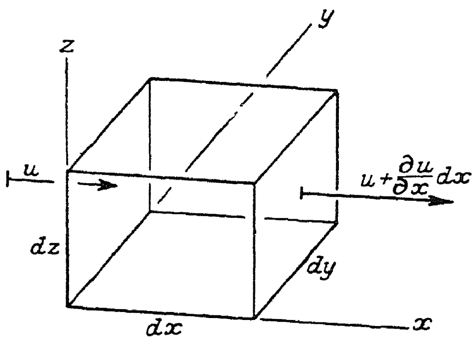


Fig. 49.

analytisch formuliert werden. Die Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in Richtung der x-Achse liefert in der Zeit dt einen Überschuß an ausströmender über einströmende Flüssigkeit (Fig. 49):

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy\,dz\,dt - u\,dy\,dz\,dt = \frac{\partial u}{\partial x}d\tau\,dt.$$

Dieser Ausdruck mißt den Überschuß dem Volumen nach, und wenn die konstante Dichte

$$\varrho = 1$$

gesetzt wird, auch der Masse nach.

Der von der gesamten Geschwindigkeit gelieferte Überschuß ist dann

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau\,dt = \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau\,dt. \tag{29}$$

Dieser Überschuß ist gleich der Flüssigkeitsmenge $e\,d\tau\,dt$, welche die in dem Volumelement enthaltenen Quellen in der Zeit dt liefern; mithin ist die Quelldichte (für $\varrho = 1$)

$$e = \operatorname{div}\mathfrak{v}. \tag{30}$$

Damit ist eine mechanische Deutung für die Divergenz eines Feldes gefunden, dessen Feldvektor als Geschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit gedeutet wurde. Unabhängig von diesem hydrodynamischen Sinn wird das durch (30) definierte skalare Feld $e = \operatorname{div}\mathfrak{v}$ als das zu dem Vektorfeld $\mathfrak{v}$ gehörige Quellenfeld bezeichnet.

84. Gaußscher Integralsatz. Geht man zu einem beliebig begrenzten endlichen Gebiet über, so ist die Gesamtergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen

$$\int e\,d\tau = \int \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau,$$

wobei die Integration über das eingeschlossene Volumen zu erstrecken ist.

Um die durch eine Fläche in der Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge zu berechnen, zerlegt man die Fläche in Elemente do und bezeichnet mit $d\mathfrak{o}$ das orientierte Flächenelement bzw. seine Ergänzung, den in Richtung der Normalen fallenden Vektor vom Betrag do. Bei geschlossenen Flächen soll als positive Normalenrichtung stets die Richtung der äußeren Normalen gewählt werden.

Das Volumen der durch ein Flächenstück in der Zeiteinheit strömenden Flüssigkeitsmenge wird als Fluß bezeichnet. Der Fluß durch ein Flächenelement $d\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$; der Fluß durch ein endliches Flächenstück ist $\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$, wobei die Integration über das Flächenstück zu erstrecken ist.

Für eine geschlossene Fläche ist $\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$ der Überschuß der ausströmenden über die einströmende Flüssigkeit, also gleich der Gesamtergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen. Mithin ist

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}, \tag{31}$$

oder unter Verwendung des Operationssymbols ∇

$$\int \nabla \cdot \mathfrak{v}\, d\tau = \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}. \tag{31'}$$

In Koordinaten geschrieben erhält man:

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau = \int [u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz)]\, do. \tag{31''}$$

[Wegen der Bezeichnung vgl. etwa (13).]

Dieser Satz heißt der Gaußsche Integralsatz. Er verwandelt ein Raumintegral in ein Hüllenintegral, d. h. ein über eine geschlossene Fläche erstrecktes Oberflächenintegral. Er gilt unabhängig von der zur Ableitung verwendeten Deutung des Vektors $\mathfrak{v}$ für jeden in einem endlichen Gebiet eindeutigen, stetigen und differentiierbaren Feldvektor $\mathfrak{v}$ und kann auch ohne Zuhilfenahme physikalischer Vorstellungen bewiesen werden. Der Ausdruck $\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$ wird unabhängig von der physikalischen Deutung von $\mathfrak{v}$ als Vektorfluß bezeichnet. Ist $\mathfrak{v}$ eine Feldstärke, so spricht man von Kraftfluß.

Die Feldlinien, die durch eine kleine, geschlossene Kurve gehen, bilden eine Röhre; diese wird, wenn $\mathfrak{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit ist, als Stromröhre bezeichnet; sonst spricht man von Kraftröhre, Wirbelröhre usw.

Wir betrachten nun ein Gebiet, das von einem Stück einer Röhre und zwei Querschnitten Q_1 und Q_2 derselben begrenzt ist; im Inneren dieses Gebietes setzen wir Quellenfreiheit voraus. Dann ist

$$\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 0,$$

das Integral genommen über die Begrenzung des Gebietes. Auf dem Mantel der Röhre ist an jeder Stelle $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 0$, weil die beiden Vektoren $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{o} = \mathfrak{n}\,do$ aufeinander senkrecht stehen. Der Integrationsbereich reduziert sich infolgedessen auf die beiden Querschnitte; die Normale ist an beiden Querschnitten nach außen gerichtet. Kehrt man am Eintrittsquerschnitt die Normalenrichtung um, so folgt

$$\int_{Q_1} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \int_{Q_2} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}. \tag{32}$$

Der Gaußsche Integralsatz sagt dann einfach aus, daß der Fluß durch jeden Querschnitt der Röhre denselben Wert hat. —

Eine spezielle Form des Gaußschen Integralsatzes (31) erhält man, wenn $\mathfrak{v}$ ein Gradient ist. Setzt man in (31′)

$$\mathfrak{v} = \nabla V,$$

so kommt

$$\int \nabla \cdot \nabla V d\tau = \int \nabla V \cdot d\mathfrak{o};$$

dabei ist nach (13)

$$\nabla V \cdot d\mathfrak{o} = \mathfrak{n} \cdot \nabla V do = \frac{\partial V}{\partial n} do;$$

unter Verwendung von (VII) erhält man die wichtige Gleichung

$$\int \triangle V d\tau = \int \frac{\partial V}{\partial n} do. \tag{33}$$

85. Ergiebigkeit einer punktförmigen Quelle. Wenn sich eine einfach zusammenhängende, geschlossene Fläche gegen einen im Inneren gelegenen Punkt zusammenzieht, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz (31)

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim \frac{\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}}{\int d\tau}. \tag{34}$$

Dieser Grenzwert kann als Definition der Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}$ benutzt werden. Die Gleichung (34) sagt neuerdings aus, daß der Fluß durch die Begrenzung der Volumeinheit und damit die Quelldichte durch die Divergenz des Feldvektors gemessen wird.

Befindet sich in einem sonst quellenfreien Feld eine punktförmige Quelle von endlicher Ergiebigkeit E, so hat auch der Fluß durch jede den Quellpunkt einschließende Fläche, z. B. durch

jede Kugel um den Quellpunkt als Mittelpunkt denselben Wert E. Für eine Kugel vom Radius r wird der Fluß

$$\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 4r^2\pi \,|\,\mathfrak{v}\,| = E.$$

Die Geschwindigkeit nimmt also mit dem Quadrat der Entfernung vom Quellpunkt ab; im Quellpunkt selbst wird sie von zweiter Ordnung unendlich groß. Die Divergenz im Quellpunkt wird nach (34)

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{r \to 0} \frac{E}{\frac{4}{3} r^3 \pi},$$

also unendlich groß von dritter Ordnung. Die Ergiebigkeit einer punktförmigen Quelle kann nicht durch die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors, sondern nur durch den Fluß durch eine geschlossene Fläche um den Quellpunkt gemessen werden.

86. Mit dem Gaußschen Satz verwandte Sätze. Ersetzt man in dem Gaußschen Integralsatz

$$\int \nabla \cdot \mathfrak{v}\, d\tau = \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$$

den Vektor $\mathfrak{v}$ durch $V\mathfrak{e}$, wo V eine skalare Feldfunktion, $\mathfrak{e}$ einen konstanten Vektor bedeutet, so erhält man nach Ziff. 80 (III)

$$\int \mathfrak{e} \cdot \nabla V d\tau = \int V\mathfrak{e} \cdot d\mathfrak{o}.$$

Der Faktor $\mathfrak{e}$ kann beiderseits vor das Integral gezogen werden; und da $\mathfrak{e}$ ein willkürlicher konstanter Faktor ist, folgt aus der Gleichheit der beiden skalaren Produkte die Gleichheit der zweiten Faktoren:

$$\int \nabla V d\tau = \int V d\mathfrak{o} \tag{35}$$

oder:

$$\int \operatorname{grad} V d\tau = \int V d\mathfrak{o}. \tag{35'}$$

Ersetzt man in dem Gaußschen Integralsatz $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}$:

$$\int \nabla \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{e})\, d\tau = \int (\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}) \cdot d\mathfrak{o},$$

so erhält man durch Ausführung der Differentiation nach (V) und Anwendung des Vertauschungssatzes:

$$\int \nabla \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{e}\, d\tau = \int d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{e}.$$

Hieraus folgt wie oben:

$$\int \nabla \times \mathfrak{v}\, d\tau = \int d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} \tag{36}$$

oder:

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\tau = \int d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v}. \tag{36'}$$

Eine einfache Anwendung des Satzes (35) erhält man, wenn man $V = 1$ setzt. Dann ergibt sich:

$$\int d\mathfrak{o} = 0. \tag{37}$$

Diese Gleichung enthält die Verallgemeinerung des bereits bekannten Satzes (Ziff. 14), daß die orientierte Oberfläche eines geschlossenen Polyeders Null ist, auf gekrümmte geschlossene Flächen. Zerlegt man (37) in Komponenten, so erhält man:

$$\int \cos(nx)\,do = 0 \tag{37'}$$

und zwei ebenso gebaute Gleichungen. Diese drei Gleichungen sagen aus, daß die Projektion einer geschlossenen Fläche auf jede Koordinatenebene und damit überhaupt auf jede Ebene Null ist. Bei der Projektion entsteht nämlich eine doppelte (oder in Teilgebieten $2p$-fache) Überdeckung mit entgegengesetzten Vorzeichen.

87. Erweiterung des Gaußschen Satzes für Tensorintegrale. Eine Felddyade kann in eine dreigliedrige Summe von dyadischen Produkten zerlegt werden, deren rechte Faktoren vorgeschriebene konstante Vektoren, etwa $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, sind (vgl. Ziff. 31):

$$\Phi = \mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\mathfrak{k};$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind dann drei durch Φ und die Wahl von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmte Feldvektoren.

Dann läßt sich das Hüllenintegral $\int d\mathfrak{o}\cdot\Phi$ nach dem Gaußschen Integralsatz in der folgenden Weise umformen:

$$\begin{aligned}\int d\mathfrak{o}\cdot\Phi &= \int d\mathfrak{o}\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\mathfrak{k})\\ &= \int \nabla\cdot\mathfrak{a}\,d\tau\,\mathfrak{i} + \int \nabla\cdot\mathfrak{b}\,d\tau\,\mathfrak{j} + \int \nabla\cdot\mathfrak{c}\,d\tau\,\mathfrak{k}\\ &= \int \nabla\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j} + \mathfrak{c}\mathfrak{k})\,d\tau.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Erweiterung des Gaußschen Integralsatzes:

$$\int \nabla\cdot\Phi\,d\tau = \int d\mathfrak{o}\cdot\Phi. \tag{38}$$

Sie hat dieselbe Form wie der ursprüngliche Gaußsche Integralsatz für Vektoren. Durch Wiederholung desselben Verfahrens läßt sich zeigen, daß die Gleichung (38) auch für Tensoren beliebig hoher Stufe gilt.

88. Zusammenstellung. Die bisher gefundenen Integralsätze lassen sich in folgender Weise zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned}\int d\tau \nabla V &= \int d\mathfrak{o}\, V;\\ \int d\tau \nabla \cdot \mathfrak{v} &= \int d\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{v};\\ \int d\tau \nabla \times \mathfrak{v} &= \int d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v};\\ \int d\tau \nabla \cdot \Phi &= \int d\mathfrak{o} \cdot \Phi.\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Die Umwandlung eines Raumintegrals in ein Hüllenintegral kann also mechanisch dadurch ausgeführt werden, daß man $d\tau\nabla$ durch $d\mathfrak{o}$ ersetzt.

In ähnlicher Weise, wie sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes div $\mathfrak{v}$ durch einen Grenzwert (34) darstellen ließ, lassen sich nach (39) sämtliche mit Hilfe des Operationssymbols ∇ gebildeten Invarianten als Grenzwerte auffassen:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{grad} V = \nabla V &= \lim \frac{\int d\mathfrak{o}\, V}{\int d\tau};\\ \operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \cdot \mathfrak{v} &= \lim \frac{\int d\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{v}}{\int d\tau};\\ \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v} &= \lim \frac{\int d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v}}{\int d\tau};\\ \nabla \cdot \Phi &= \lim \frac{\int d\mathfrak{o} \cdot \Phi}{\int d\tau}.\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

§ 4. Rotation.

89. Mechanische Deutung der Rotation. Dreht sich ein starrer Körper, von dem ein Punkt O festgehalten wird, mit der Winkelgeschwindigkeit[1])

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\xi + \mathfrak{j}\eta + \mathfrak{k}\zeta \quad (41)$$

um eine durch O gehende Achse, so ist die Geschwindigkeit eines Punktes P des Körpers

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r};$$

$\mathfrak{r}$ ist der von O nach P führende Ortsvektor.

---

1) In weiten Gebieten der mathematischen Physik ist es üblich, die Maßzahlen einer Winkelgeschwindigkeit ξ, η, ζ zu nennen. Aus diesem Grund ist hier von dem Gebrauch abgewichen, die Maßzahlen eines Vektors mit lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

Es soll die **Rotation der Geschwindigkeit** $\mathfrak{v}$ berechnet werden:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{rot}(\mathfrak{u}\times\mathfrak{r}) = \nabla\times\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Der letzte Ausdruck nimmt nach (21) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{v} &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \eta z - \zeta y & \zeta x - \xi z & \xi y - \eta x \end{vmatrix} \\ &= 2\mathfrak{i}\xi + 2\mathfrak{j}\eta + 2\mathfrak{k}\zeta; \\ \operatorname{rot}\mathfrak{v} &= 2\mathfrak{u}. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Rotation der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes eines starren Körpers ist gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers. Der Satz bleibt gültig, wenn sich der starre Körper nicht, wie oben angenommen, um einen festen Punkt dreht, sondern außer der Drehung eine beliebige Translationsbewegung ausführt.

Es ist also die **Winkelgeschwindigkeit**

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}, \tag{42'}$$

wenn $\mathfrak{v}$ der Feldvektor der Geschwindigkeit eines Punktes des starren Körpers ist.

90. Linienintegral eines Vektors [vergl. Ziff. 64 (Arbeit einer Kraft)]. Das Linienintegral $\int\limits_{(1)}^{(2)}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}$ eines Feldvektors $\mathfrak{v}$, berechnet zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 längs irgendeiner von P_1 nach P_2 führenden Kurve C, ist im allgemeinen nicht nur von den Grenzen des Integrationswegs, sondern von diesem selbst abhängig. Soll das Linienintegral vom Weg unabhängig sein, so muß $\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r}$ ein totales Differential dV einer skalaren Funktion V des Ortes sein, wobei dV selbst die einer Verschiebung des Aufpunkts um $d\mathfrak{r}$ entsprechende Änderung von V ist. Also muß

$$\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = dV = d\mathfrak{r}\cdot\nabla V$$

sein für jede Änderung $d\mathfrak{r}$, also

$$\mathfrak{v} = \nabla V; \tag{43}$$

dann wird

$$\int\limits_{(1)}^{(2)}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{r} = V_2 - V_1. \tag{44}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit des Linienintegrals $\int_{(1)}^{(2)} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$ vom Weg ist also die, daß $\mathfrak{v}$ ein Gradient ist. Dann ist das Linienintegral bei festgehaltenem Anfangspunkt eine eindeutige Funktion des Endpunktes des Integrationswegs, solange der Integrationsweg auf ein Gebiet beschränkt ist, in dem V eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Darüber hinaus hat in einem solchen Gebiet das Linienintegral denselben Wert $V_2 - V_1$ für alle Integrationswege, welche von irgendeinem Punkt der Niveaufläche mit dem Feldwert V_1 nach irgendeinem Punkt der Niveaufläche mit dem Feldwert V_2 führen.

Wird ein Integrationsweg in umgekehrter Richtung durchlaufen, so ändert das Linienintegral sein Vorzeichen:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = -\int_{(2)}^{(1)} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}. \tag{45}$$

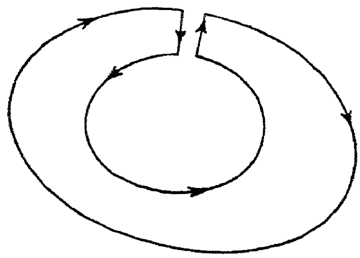


Fig. 50.

Diese Gleichung gilt für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$, wenn der Rückweg auf derselben Kurve genommen wird; sie gilt, wenn $\mathfrak{v}$ der Gradient einer skalaren Ortsfunktion V ist, auch für jeden anderen Rückweg innerhalb eines Gebietes, in dem V eindeutig ist. Infolgedessen ist das Linienintegral des Gradienten einer eindeutigen Funktion über eine geschlossene Kurve (Randintegral) Null:

$$\oint d\mathfrak{r} \cdot \nabla V = 0. \tag{46}$$

Dabei ist eine wichtige Bemerkung nicht zu übersehen. Aus der Eindeutigkeit des Gradienten ∇V kann man die Eindeutigkeit von V selbst mit Sicherheit nur in einfach zusammenhängenden Gebieten folgern, nicht aber in mehrfach zusammenhängenden, etwa ringförmigen Gebieten. Es ist möglich, daß V in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet eines Ringgebiets eindeutig ist, in dem Ringgebiet selbst aber nicht. Dann besitzt das Randintegral über alle geschlossenen Kurven des Ringgebiets, die in dem Ringgebiet stetig ineinander übergeführt, aber nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden können, einen festen Wert Γ:

$$\oint d\mathfrak{r} \cdot \nabla V = \Gamma. \tag{47}$$

Um das zu zeigen, verbindet man zwei geschlossene Kurven dieser Art durch einen Querschnitt (Fig. 50). Dadurch entsteht ein einfach

zusammenhängendes Gebiet von der Form eines aufgeschnittenen Ringes, über dessen Begrenzung das Randintegral $\oint d\mathfrak{r}\cdot\nabla V$ Null ist. Dabei werden die beiden geschlossenen Kurven mit entgegengesetztem Umlaufssinn und der Querschnitt zweimal in verschiedenem Sinn durchlaufen. Daher hat das Randintegral über jede der beiden geschlossenen Kurven bei gleichem Umlaufssinn den gleichen Wert Γ.

Auf einem nicht geschlossenen Weg in dem Ringgebiet ist

$$\int_{(1)}^{(2)} d\mathfrak{r}\cdot\nabla V = V_2 - V_1$$

keine eindeutige Funktion, da V selbst keine eindeutige Funktion des Ortes ist, sondern sich bei jedesmaligem Umlauf um Γ ändert. Eine solche Funktion heißt zyklisch. Man kann sie dadurch eindeutig machen, daß man das ringförmige Gebiet durch einen Querschnitt einfach zusammenhängend macht. Dann besitzt die Feldfunktion an jeder Stelle des Querschnitts auf dessen beiden Ufern Werte, die sich um Γ unterscheiden.

91. Konservative Kräfte. Ein Beispiel für ein nicht exaktes Differential ist (vgl. Ziff. 64) im allgemeinen die Elementararbeit einer Kraft $\mathfrak{K}$:

$$dA = d\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{K}. \tag{48}$$

Sie wird nur dann zu einem exakten Differential, wenn sie das Differential einer skalaren Feldfunktion ist. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die Kraft $\mathfrak{K}$ konservativ ist, d. h. daß eine skalare Feldfunktion, die Kräftefunktion U, existiert, deren Gradient die Kraft $\mathfrak{K}$ ist:

$$\mathfrak{K} = \nabla U. \tag{49}$$

Dann ist die Elementararbeit

$$dA = d\mathfrak{r}\cdot\nabla U = dU, \tag{50}$$

und die Arbeit zwischen P_1 und P_2 ist die Differenz der Werte der Kräftefunktion in diesen Punkten, also vom Weg unabhängig:

$$A\,\Big|_1^2 = U_2 - U_1. \tag{50'}$$

Physikalisch wichtiger als die Kräftefunktion U ist die potentielle Energie

$$V = -U$$

des bewegten Massenpunktes. Bei Verwendung dieser Funktion V erscheint die Kraft als Potentialgefälle:

$$\mathfrak{K} = -\nabla V. \tag{51}$$

Die Arbeit zwischen zwei Punkten wird

$$A\Big|_1^2 = V_1 - V_2. \tag{51'}$$

Bemerkt man anderseits, daß nach dem Satz von der lebendigen Kraft (Ziff. 64)

$$A\Big|_1^2 = T_2 - T_1$$

ist, so erhält man den Energiesatz für die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer konservativen Kraft:

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2. \tag{52}$$

Die Summe aus lebendiger Kraft und potentieller Energie besitzt in jedem Punkt der Bahn denselben Wert; es ist

$$T + V = E, \tag{52'}$$

wo E eine Konstante, nämlich die Gesamtenergie des bewegten Massenpunktes ist.

Kräftefunktion und potentielle Energie können eindeutig oder zyklisch sein; ersteres ist der Fall bei den Anziehungskräften gravitierender oder elektrischer Massen; letzteres bei den durch einen geschlossenen elektrischen Strom hervorgerufenen magnetischen Kräften. In letzterem Fall erfordert die Bewegung eines Poles auf jedem geschlossenen Weg um den Leiter herum die gleiche Arbeit.

92. Stokesscher Integralsatz. Das Linienintegral längs einer geschlossenen Kurve C

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$$

läßt sich in ein Flächenintegral über eine von C berandete Fläche F verwandeln, wenn es möglich ist, in C eine Fläche F derart einzuspannen, daß in allen Punkten dieser Fläche $\mathfrak{v}$ endlich, eindeutig, stetig und differentiierbar ist.

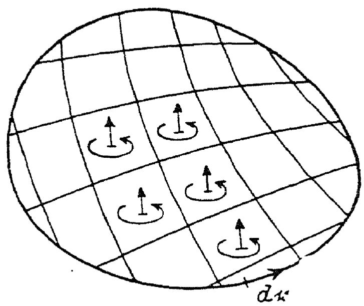


Fig. 51 a.

Um das zu beweisen, teilt man die Fläche F durch zwei Kurvenscharen in kleine Teilflächen, die mit Ausnahme der an C gelegenen Reststücke parallelogrammartig sind (Fig. 51 a). Dann kann man das Randintegral längs C ersetzen durch die Summe der Randintegrale um sämtliche Teilflächen; denn beim Umlaufen der Teilflächen werden sämtliche Linien, welche die Teilung von F bewerkstelligen, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen mit alleiniger Ausnahme des Randes C. Der Fläche soll in jedem Punkt eine Nor-

malenrichtung zugewiesen werden, die mit der Umlaufsrichtung zusammen eine Rechtsschraube bildet.

Es soll jetzt das Randintegral $\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$ um eine Teilfläche berechnet werden. Wir bezeichnen (vgl. Fig. 51b) die Seite des Vierecks, die von einer Ecke aus in Richtung des Umlaufssinnes ausgeht, mit $d_1\mathfrak{r}$, und die Seite, die dem Umlaufssinn entgegen von derselben Ecke ausgeht, mit $d_2\mathfrak{r}$. Allgemein sollen d_1 und d_2 als Symbole für Differentiale einer Feldgröße verwendet werden, wenn der Aufpunkt um $d_1\mathfrak{r}$ bzw. $d_2\mathfrak{r}$ verschoben wird. Es verändern sich dabei insbesondere die Seiten $d_2\mathfrak{r}$ um $d_1 d_2\mathfrak{r}$ und $d_1\mathfrak{r}$ um $d_2 d_1\mathfrak{r}$. Mithin sind die noch fehlenden Vierecksseiten mit

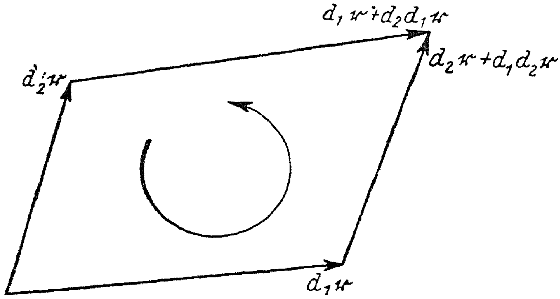


Fig. 51b.

$$d_1\mathfrak{r} + d_2 d_1\mathfrak{r} \quad \text{und} \quad d_2\mathfrak{r} + d_1 d_2\mathfrak{r}$$

zu bezeichnen; dann ist, wie bereits bekannt [Ziff. 58 (74′)]

$$d_2 d_1\mathfrak{r} - d_1 d_2\mathfrak{r} = 0 \tag{53}$$

die Schließungsbedingung für das Viereck.

Es sind ferner die Differenzen von $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$ an zwei gegenüberliegenden Vierecksseiten für das eine Seitenpaar $d_2(\mathfrak{v} \cdot d_1\mathfrak{r})$, für das andere Seitenpaar $d_1(\mathfrak{v} \cdot d_2\mathfrak{r})$. Dann nähert sich das Randintegral um das Viereck für abnehmende Seitenlängen dem Wert:

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = d_1(\mathfrak{v} \cdot d_2\mathfrak{r}) - d_2(\mathfrak{v} \cdot d_1\mathfrak{r}),$$

oder mit Rücksicht auf (53):

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = d_1\mathfrak{v} \cdot d_2\mathfrak{r} - d_2\mathfrak{v} \cdot d_1\mathfrak{r}.$$

Durch Ausführung der Richtungsdifferentiationen erhält man:

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = d_1\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{v} \cdot d_2\mathfrak{r} - d_2\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{v} \cdot d_1\mathfrak{r},$$

und wegen der Identität Ziff. 80 (VI)

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = (d_1\mathfrak{r} \times d_2\mathfrak{r}) \cdot (\nabla \times \mathfrak{v})$$

oder

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{o} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v}. \tag{53′}$$

$d_1\mathfrak{r} \times d_2\mathfrak{r} = d\mathfrak{o}$ ist der orientierte Inhalt eines infinitesimalen Parallelogramms und unterscheidet sich um ein Differential 3. Ordnung

vom Inhalt des parallelogrammartigen Vierecks. Läßt man die Teilung dicht werden und integriert über die Randkurve C, so verschwindet dieser Unterschied ebenso wie der Inhalt der an C gelegenen nicht parallelogrammartigen Reststücke.

Damit ist die Umwandlung des Randintegrals längs C in ein Flächenintegral über F gefunden:

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = \int \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}. \tag{54}$$

Diese Gleichung wird als Stokesscher Integralsatz bezeichnet. In Koordinaten lautet er:

$$\oint (u dx + v dy + w dz) = \int \begin{vmatrix} \cos(nx) & \cos(ny) & \cos(nz) \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} do. \tag{54'}$$

Der Stokessche Integralsatz sagt aus, daß das Randintegral eines Vektors $\mathfrak{v}$ um eine geschlossene Kurve gleich dem Fluß des Vektors rot $\mathfrak{v}$ durch eine in die Kurve eingespannte Fläche ist. Diese Fläche ist bei festgehaltenem Rand C in einem Gebiet willkürlich, in dem die Bedingungen der Endlichkeit, Stetigkeit, Eindeutigkeit und Differentiierbarkeit von $\mathfrak{v}$ erfüllt sind.

Für eine in diesem Gebiet liegende geschlossene Fläche ist daher

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = 0.$$

Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist Null; begreiflicherweise; denn nach dem Gaußschen Integralsatz müßte er gleich der Ergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen des Vektors rot $\mathfrak{v}$ sein, und zufolge der Identität Ziff. 81 (X)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

ist jeder Wirbelvektor quellenfrei. —

Aus (53′) läßt sich, wenn mit $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor der Normalen der Plangröße $d\mathfrak{o}$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$\mathfrak{n} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \lim \frac{\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}}{do}$$

herleiten, die den Gleichungen (40) verwandt ist. Sie sagt aus, daß das Linienintegral eines Vektors um die Berandung der Flächeneinheit gleich der Projektion seiner Rotation auf die zugehörige Normale ist.

93. Eine Anwendung des Stokesschen Integralsatzes. Nach dem Stokesschen Integralsatz (54)

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r}$$

wird für einen im Integrationsbereich wirbelfreien Vektor $\mathfrak{v}$, für den also

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

ist,

$$\oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{r} = 0 .$$

Dieses Linienintegral ist über eine beliebige geschlossene Kurve des Gebiets zu erstrecken, in dem $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ ist. Dann ist nach Ziff. 90 $\mathfrak{v}$ ein Gradient:

$$\mathfrak{v} = \nabla V .$$

Diese Integration der Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ kann als Umkehrung der Identität Ziff. 81 (IX)

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0$$

aufgefaßt werden.

94. Mit dem Stokesschen Integralsatz verwandte Sätze. Der Stokessche Integralsatz (54) läßt sich in folgende Gestalt bringen:

$$\oint d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} = \int d\mathfrak{o} \cdot \nabla \times \mathfrak{v} = \int d\mathfrak{o} \times \nabla \cdot \mathfrak{v} .$$

Hieraus lassen sich wie bei der Umwandlung des Gaußschen Integralsatzes (Ziff. 86, 87, 88) eine Reihe von neuen Gleichungen gewinnen.

Ersetzt man z. B. $\mathfrak{v}$ durch einen Vektor von fester Richtung

$$\mathfrak{v} = V \mathfrak{e} ,$$

so kann man den konstanten Vektor $\mathfrak{e}$ aus den Integralen herausziehen; dann sind, weil $\mathfrak{e}$ beliebig ist, die zweiten Faktoren gleich

$$\oint d\mathfrak{r}\, V = \int d\mathfrak{o} \times \nabla V . \tag{55}$$

Ersetzt man $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v} \times \mathfrak{e}$, so erhält man eine Umformung des Linienintegrals $\oint d\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$; endlich kann man den Stokesschen Integralsatz für Tensorintegrale erweitern.

95. Zusammenstellung.

$$\left.\begin{aligned}
\oint d\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} &= \int d\mathfrak{o} \times \nabla \cdot \mathfrak{v} = \int d\mathfrak{o} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} ;\\
\oint d\mathfrak{r}\, V &= \int d\mathfrak{o} \times \nabla V = \int d\mathfrak{o} \times \operatorname{grad} V ;\\
\oint d\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} &= \int (d\mathfrak{o} \times \nabla) \times \mathfrak{v} ;\\
\oint d\mathfrak{r} \cdot \Phi &= \int (d\mathfrak{o} \times \nabla) \cdot \Phi = \int d\mathfrak{o} \cdot \nabla \times \Phi .
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Die Umwandlung eines Randintegrals in ein Flächenintegral kann formal dadurch ausgeführt werden, daß $d\mathfrak{r}$ durch $d\mathfrak{o} \times \nabla$ ersetzt wird.

§. 5. Anwendungen auf Hydrodynamik.

96. Vorbemerkungen. Die Geschwindigkeitsverteilung in einer strömenden Flüssigkeit bildet ein zeitlich veränderliches Vektorfeld. Die Feldlinien in einem festen Zeitpunkt werden als Stromlinien bezeichnet. Sie sind nicht zu verwechseln mit den Bahnkurven, in denen sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen bewegen, und mit denen sie nur bei stationärer Bewegung identisch sind.

Es sollen die Gesetze der Bewegung einer idealen Flüssigkeit aufgestellt werden. Unter einer idealen Flüssigkeit wird eine Flüssigkeit verstanden, in welcher der Druck an jeder Stelle konstant ist; d. h. auf die Flächeneinheit sämtlicher Flächenelemente, die man durch einen Punkt im Inneren der Flüssigkeit legen kann, wirkt derselbe spezifische Druck p und zwar in Richtung der Normalen. Das soll nicht nur im Zustand der Ruhe, sondern auch im Zustand der Bewegung gelten. Von den Scherkräften, welche bei der Bewegung einer wirklichen Flüssigkeit auftreten, wird abgesehen.

Die Dichte ϱ der Flüssigkeit soll entweder konstant sein — in diesem Fall heißt die Flüssigkeit inkompressibel —, oder sie soll eine Funktion des Druckes p allein sein.

97. Kontinuitätsgleichung. Für die stetige Bewegung einer Flüssigkeit muß in erster Linie eine kinematische Bedingung erfüllt sein, die aussagt, daß die Flüssigkeit den von ihr eingenommenen Raum dauernd lückenlos erfüllt. Diese Bedingung gilt übrigens für nichtideale Flüssigkeiten genau so wie für ideale.

Es soll ein ganz im Innern der Flüssigkeit gelegenes endliches Gebiet betrachtet werden, in dem eine kontinuierliche Verteilung von Quellen von der Quelldichte e zugelassen ist (Ziff. 83). Dann wird die von diesen Quellen in der Zeiteinheit gelieferte Flüssigkeitsmenge einerseits dazu dienen können, daß die innerhalb der Begrenzung befindliche Flüssigkeitsmenge infolge Zunahme der Dichte vermehrt wird, andrerseits dazu, daß ein Überschuß der Menge der durch die Begrenzung ausströmenden über die Menge der einströmenden Flüssigkeit besteht.

Die Gesamtergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen bezogen auf die Zeiteinheit ist $\int e\,d\tau$. Ist die Gesamtmenge der eingeschlossenen Flüssigkeit $\int \varrho\,d\tau$, so ist ihr Zuwachs infolge Vergrößerung der Dichte bezogen auf die Zeiteinheit $\int \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,d\tau$.

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist der Überschuß der ausströmenden über die einströmende Menge, wenn $\mathfrak{v}$ wie immer die Geschwindigkeit bedeutet, der Masse nach

$$\int \varrho \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}) d\tau .$$

Infolgedessen gilt die Gleichung:

$$\int e d\tau = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\tau + \int \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}) d\tau ;$$

sie gilt nicht nur für die ursprünglich ins Auge gefaßte Begrenzung, sondern für jede Begrenzung in einem Gebiet, in dem die Funktionen ϱ und $\mathfrak{v}$ eindeutig, endlich, stetig und differentiierbar sind. Also gilt

$$e = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}) . \tag{57}$$

Insbesondere bezeichnet man die für quellenfreie Gebiete geltende Gleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}) = 0 \tag{57a}$$

als Kontinuitätsgleichung. Sie reduziert sich für inkompressible Flüssigkeiten auf

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 . \tag{57b}$$

98. Substantielle Änderung einer Feldgröße. Um die zeitliche Änderung einer an ein substantielles Teilchen gebundenen Größe, z. B. der Dichte ϱ oder der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Teilchens, zu finden, muß man beachten, daß in der Funktion $f(xyzt)$, welche diese Größe gibt, x, y, z selbst Funktionen von t sind. Also ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla f . \tag{58}$$

Darnach setzt sich die substantielle Änderung $\frac{df}{dt}$ aus zwei Teilen zusammen:

1. aus der lokalen Änderung $\frac{\partial f}{\partial t}$, d. h. der Änderung der Feldgröße f am Ort, die bei stationären Strömungen Null ist;

2. aus der konvektiven Änderung $\mathfrak{v} \cdot \nabla f$, die durch den Transport des Flüssigkeitsteilchens an eine Stelle mit einem anderen Werte der Größe f verursacht ist und auch bei stationären Strömungen nicht verschwindet.

Mit Hilfe des Begriffs der substantiellen Änderung läßt sich die Kontinuitätsgleichung umformen. Zunächst folgt aus (57a) nach Ziff. 80 (III):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0.$$

Also ist nach (58)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = -\frac{d \lg \varrho}{dt}. \tag{59}$$

Diese Gleichung, die div $\mathfrak{v}$ in die Form der substantiellen Änderung einer Funktion der Dichte bringt, drückt nichts anderes aus als die Unveränderlichkeit der Masse eines Teilchens bei der Bewegung. Denn wenn sich dabei ein Volumenelement $\delta\tau$ in der Zeit dt um $d\delta\tau$ ändert, gibt $\frac{d\delta\tau}{\delta\tau}$ den entstehenden Volumenzuwachs bezogen auf die Volumeinheit; es ist also nach (30)

$$d\delta\tau = \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dt\, \delta\tau.$$

Mithin ist nach (59)

$$\frac{d \lg \delta\tau}{dt} + \frac{d \lg \varrho}{dt} = 0,$$

also

$$\varrho\,\delta\tau = \text{const}, \tag{60}$$

womit die Unveränderlichkeit der Masse ausgedrückt ist.

99. Eulersche Gleichung der Bewegung. Die Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens genügt dem Grundgesetz der Dynamik, das nach Ziff. 64 (104) in der Form

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{R} \tag{61}$$

geschrieben werden kann. Hier ist

$$\mathfrak{J} = \int \varrho\, \mathfrak{v}\, d\tau$$

der Impuls des Flüssigkeitsteilchens, $\mathfrak{R}$ die Resultierende der auf das Teilchen wirkenden Kräfte. Diese setzt sich zusammen aus der Resultierenden $\mathfrak{R}_a$ der auf das Teilchen wirkenden Massenkräfte — im allgemeinen kommt nur die Schwere in Betracht — und aus der Resultierenden der auf die Begrenzung des Teilchens von außen wirkenden Druckkräfte. Erstere ist

$$\mathfrak{R}_a = \int \varrho\, \mathfrak{K}\, d\tau,$$

wenn mit $\mathfrak{K}$ die auf die Masseneinheit bezogene Massenkraft bezeichnet wird; letztere ist

$$\mathfrak{P} = -\int p\, d\mathfrak{o},$$

wenn p den spezifischen Druck bedeutet. Nach dem Gaußschen Integralsatz (35) wird

$$\mathfrak{P} = -\int \nabla p \, d\tau .$$

Damit wird die Bewegungsgleichung (61) des Teilchens

$$\frac{d}{dt}\int \varrho \mathfrak{v} \, d\tau = \int \varrho \mathfrak{K} \, d\tau - \int \nabla p \, d\tau .$$

Bemerkt man, daß links wegen der Konstanz der Masse (60) die Differentiation nur an $\mathfrak{v}$ auszuführen ist, so hat man

$$\int \varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \, d\tau = \int \varrho \mathfrak{K} \, d\tau - \int \nabla p \, d\tau ,$$

und weil diese Gleichung für (mit gewissen Beschränkungen) beliebige Begrenzung gilt,

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho} \nabla p . \tag{62}$$

Die hier auftretende Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ ist die substantielle, d. h. an die bewegte Masse gebundene Änderung der Geschwindigkeit, also nach (58)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} .$$

Damit erhält man die **Eulersche Gleichung für die Bewegung einer Flüssigkeit**:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varrho} \nabla p . \tag{63}$$

Sie genügt zusammen mit der Kontinuitätsbedingung zur Beschreibung der Bewegung der Flüssigkeit bei gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen.

Die äußere Kraft $\mathfrak{K}$ ist im allgemeinen konservativ, kann also unter Einführung der potentiellen Energie V der Masseneinheit in die Form

$$\mathfrak{K} = -\nabla V$$

gesetzt werden.

100. Integrale der Eulerschen Gleichung. Die Eulersche Gleichung (63) läßt eine wichtige Umformung zu. Ersetzt man in der Identität Ziff. 80 (IV′) beide Faktoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, und bezeichnet ihren Betrag $|\mathfrak{v}|$ mit q, so wird (IV′)

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} q^2 = \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} . \tag{64}$$

Damit wird die Eulersche Gleichung, wenn man noch die äußeren Kräfte konservativ voraussetzt, in folgende Form gebracht:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \nabla \frac{q^2}{2} - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\nabla V - \frac{1}{\varrho} \nabla p . \tag{65}$$

Die Bedeutung von $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$, das jetzt in der Eulerschen Gleichung auftritt, ist folgende: Nach (42a) ist

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \tag{66}$$

die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich ein starrer Körper dreht, wenn $\mathfrak{v}$ der Feldvektor seiner Geschwindigkeit ist. In der komplizierten Bewegung, die ein Flüssigkeitsteilchen unter gleichzeitiger Formänderung in jedem Zeitelement ausführt, befindet sich also als Komponente eine Drehung um eine Momentanachse, wobei sich das Flüssigkeitsteilchen wie ein starrer Körper verhält. Diese Drehbewegung wird als Wirbelbewegung bezeichnet und durch (66) gemessen.

Strömungen, die ohne Drehung der Flüssigkeitsteilchen verlaufen, heißen wirbelfrei. Sie sind durch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0 \tag{67}$$

gekennzeichnet. Dann ist $\mathfrak{v}$ nach Ziff. 93 ein Gradient. Man setzt

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi \tag{68}$$

und nennt φ das Geschwindigkeitspotential der wirbelfreien Strömung, die auch Potentialströmung genannt wird. (Die Bezeichnung durch den griechischen Buchstaben φ entspricht dem Gebrauch in der Hydrodynamik.)

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so wird die Kontinuitätsgleichung (57b)

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \triangle \varphi = 0. \tag{69a}$$

Das Geschwindigkeitspotential genügt der Laplaceschen Gleichung.

An Stellen, an denen die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt, vielmehr eine Quelldichte e vorhanden ist, tritt an ihre Stelle nach (57) die Poissonsche Gleichung:

$$\triangle \varphi = \frac{e}{\varrho}. \tag{69b}$$

Die Eulersche Gleichung selbst wird bei wirbelfreier Bewegung

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \frac{q^2}{2} + \nabla V + \frac{1}{\varrho} \nabla p = 0;$$

sie ergibt durch Integration die gewöhnlich als Bernoullische Gleichung bezeichnete Druckgleichung:

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \frac{q^2}{2} = F(t).$$

$F(t)$ ist eine willkürliche Funktion. Beschränkt man sich auf stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit, so wird einfacher

$$\frac{p}{\varrho} + V + \frac{q^2}{2} = C, \tag{70}$$

wo C eine Konstante ist. Hier bedeuten $\frac{q^2}{2}$ die lebendige Kraft, V die Feldenergie, $\frac{p}{\varrho}$ die Druckenergie der Masseneinheit; also C die Gesamtenergie der Masseneinheit. Diese ist zeitlich unveränderlich und besitzt im ganzen Feld denselben Wert.

Ein ganz ähnliches Integral läßt sich für jede stationäre Strömung gewinnen, auch wenn die Bewegung nicht wirbelfrei ist. Multipliziert man die Eulersche Gleichung (65) für stationäre Strömung

$$\nabla \frac{q^2}{2} - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \nabla V + \frac{1}{\varrho} \nabla p = 0$$

skalar mit dem Linienelement $d\mathfrak{r}$ einer Stromlinie, so folgt wegen $d\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = 0$

$$d\mathfrak{r} \cdot \nabla \frac{q^2}{2} + d\mathfrak{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{\varrho} d\mathfrak{r} \cdot \nabla p = 0 \tag{71}$$

oder

$$d\frac{q^2}{2} + dV + \frac{1}{\varrho} dp = 0,$$

wobei die einzelnen Glieder Richtungsdifferentiale in Richtung einer Stromlinie sind. Für konstante Dichte erhält man durch Integration

$$\frac{p}{\varrho} + V + \frac{q^2}{2} = C'. \tag{72}$$

Diese Gleichung stimmt formal mit (70) überein. C' ist die Gesamtenergie der Masseneinheit; doch ist diese jetzt nur längs einer Stromlinie konstant und von Stromlinie zu Stromlinie verschieden. Innerhalb einer Stromröhre strömt die Flüssigkeit wie im Innern einer Röhre mit festen Wänden.

101. Wirbelbewegung. Als Wirbelbewegung einer Flüssigkeit bezeichnet man (Ziff. 100) die Drehbewegung der Flüssigkeitsteilchen. Die in jedem Punkte des Strömungsfeldes definierte Drehgeschwindigkeit des dort befindlichen Teilchens (66)

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

definiert das Wirbelfeld. Als Wirbellinien werden die Feldlinien dieses Feldes bezeichnet. Die Richtung der Wirbellinien

ist in jedem Punkt die Richtung der Drehachse des dort befindlichen Teilchens. Die Wirbellinien, die durch eine kleine geschlossene Kurve gehen, bilden eine Wirbelröhre. Ihr Inhalt heißt Wirbelfaden.

Die Gleichung (66) lautet in Koordinaten:

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{i}}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\mathfrak{j}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\mathfrak{k}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Es ist gebräuchlich, folgende Bezeichnung einzuführen (vgl. Fußnote Ziff. 89):

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{73}$$

ξ, η, ζ sind die Werte der Komponenten der Drehgeschwindigkeit eines Teilchens um die x, y, z-Achse. Sie werden kurz Wirbelkomponenten genannt. Dieser Brauch soll beibehalten werden, obwohl nach den im ersten Kapitel getroffenen Festsetzungen der Gebrauch des Wortes Komponenten für skalare Größen unzulässig ist.

Der Betrag der Drehgeschwindigkeit ist

$$\omega = |\mathfrak{u}| = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}|. \tag{73'}$$

Mit der Wirbelbewegung steht im engsten Zusammenhang der Begriff der Zirkulation. Man versteht darunter das über eine geschlossene Kurve C genommene Linienintegral

$$\Gamma = \oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s}. \tag{74}$$

Nach dem Stokesschen Integralsatz ist

$$\Gamma = \oint \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s} = \int \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}. \tag{74'}$$

Das Integral der rechten Seite ist über eine beliebige Fläche zu erstrecken, die von der Kurve C berandet ist und ganz in einem Gebiet verläuft, in dem die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Stokesschen Satzes erfüllt sind. Die Zirkulation ist ein Maß für den Wirbelfluß, oder wie auch gebräuchlich ist, für das Wirbelmoment der Wirbellinien, welche eine in die Kurve C eingespannte Fläche durchschneiden, also von der Kurve C umschlossen werden.

Für einen Wirbelfaden von so kleinem Querschnitt σ, daß rot $\mathfrak{v}$ in allen Punkten eines Querschnitts als konstant betrachtet werden kann, wird das Wirbelmoment

$$\Gamma = + |\operatorname{rot} \mathfrak{v}|\, \sigma.$$

Dabei gilt das positive oder negative Zeichen, je nachdem die σ zugeordnete Normale mit der Richtung von rot $\mathfrak{v}$ übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Nach (73′) wird

$$\Gamma = \pm 2\omega\sigma. \tag{75}$$

Man kann hiernach die Drehgeschwindigkeit

$$\omega = \pm \frac{\Gamma}{2\sigma}$$

bestimmen, wenn der Querschnitt eines Wirbelfadens und die Zirkulation um ihn bekannt sind.

102. Helmholtzsche Wirbelsätze. Aus den Eigenschaften der Zirkulation lassen sich leicht die von Helmholtz gefundenen Gesetze der Wirbelbewegung ableiten.

Die Zirkulation um eine geschlossene Kurve, die auf einer Wirbelröhre liegt, ist nach dem Stokesschen Integralsatz und (74′) Null, weil in jedem Punkt einer Wirbelröhre die Richtung von rot $\mathfrak{v}$ auf der Normalen der Wirbelröhre senkrecht steht.

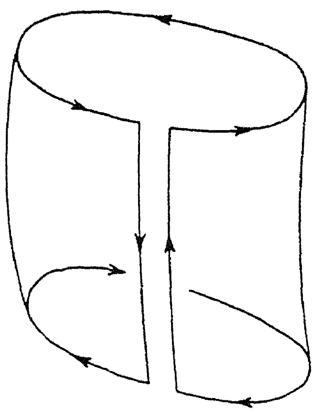


Fig. 52.

Dieser Satz soll angewendet werden auf ein Stück einer Wirbelröhre, das von zwei Querschnitten begrenzt und der Länge nach aufgeschnitten ist (Fig. 52). Das Linienintegral über den Rand der so erhaltenen einfach zusammenhängenden Fläche setzt sich zusammen aus den Linienintegralen über die beiden Querschnitte, genommen in verschiedenem Umlaufssinn, und den Linienintegralen über den Längsschnitt in beiden Richtungen. Da sich die letzteren aufheben, hat die Zirkulation um jeden Querschnitt den gleichen Wert, wenn man gleiche Umlaufsrichtung voraussetzt. Es hat also das Wirbelmoment Γ eines Wirbelfadens an jedem Querschnitt denselben Wert. Wirbellinien können deshalb im Innern der Flüssigkeit nicht beginnen und nicht endigen; sie sind geschlossene Kurven oder verlaufen ins Unendliche.

Dieser Satz gilt unabhängig von der hydrodynamischen Deutung der Wirbellinien.

Weiter läßt sich zeigen, daß das Wirbelmoment eines Wirbelfadens zeitlich konstant ist. Hierzu hat man zu zeigen, daß sich die Zirkulation um eine geschlossene Linie, die sich mit der Flüssigkeit

fortbewegt, also dauernd von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet wird, mit der Zeit nicht ändert.

Bezeichnet man das gerichtete Linienelement einer derartigen flüssigen Linie mit $\delta\mathfrak{r}$, so ist die substantielle Änderung der Zirkulation

$$\frac{d}{dt}\oint \mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r} = \oint \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\delta\mathfrak{r} + \oint \mathfrak{v}\cdot\frac{d\delta\mathfrak{r}}{dt}. \tag{76}$$

In dem zweiten Summanden wird durch Vertauschung der Differentiationen, die hier nichts anderes aussagt als die Gültigkeit des Schließungssatzes [Ziff. 58 (74')] in dem von zwei zeitlich benachbarten Lagen eines Linienelementes $\delta\mathfrak{r}$ bestimmten Viereck,

$$\frac{d\delta\mathfrak{r}}{dt} = \delta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \delta\mathfrak{v};$$

also ist

$$\oint \mathfrak{v}\cdot\frac{d\delta\mathfrak{r}}{dt} = \oint \mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\oint \delta q^2.$$

Das letzte Integral verschwindet, weil die Geschwindigkeit eine einwertige Funktion des Ortes ist.

Um zu zeigen, daß der erste Summand in (76) ebenfalls verschwindet, formt man ihn mit dem Stokesschen Integralsatz um:

$$\oint \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\delta\mathfrak{r} = \int \operatorname{rot}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot d\mathfrak{o}.$$

Die Eulersche Gleichung für die Bewegung einer Flüssigkeit unter dem Einfluß konservativer äußerer Kräfte ist:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\nabla V - \frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Ihre rechte Seite ist unter der stets gemachten Voraussetzung, daß die Dichte ϱ eine Funktion des Druckes p ist, ein Gradient. also ist nach Ziff. 81 (IX)

$$\operatorname{rot}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0.$$

Damit ist erkannt, daß auch der erste Summand verschwindet und infolgedessen die Zirkulation $\oint \mathfrak{v}\cdot\delta\mathfrak{r}$ um eine flüssige Linie von der Zeit unabhängig ist.

Also ist das Moment eines Wirbelfadens von der Zeit unabhängig. Wirbel können in einer idealen Flüssigkeit weder entstehen noch vergehen.

Als eine weitere Eigenschaft der Wirbelbewegung läßt sich zeigen, daß ein Wirbelfaden dauernd von denselben Teilchen gebildet wird.

Die Zirkulation um ein Oberflächenelement einer Wirbelröhre ist Null. Sie bleibt dauernd Null, wenn die Begrenzung des Oberflächenelements als eine flüssige Linie betrachtet wird. Das Oberflächenelement bleibt also dauernd Oberflächenelement einer Wirbelröhre; eine Wirbelröhre wird dauernd von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet. Da eine Wirbellinie als teilweiser Schnitt zweier Wirbelröhren angesehen werden kann, wird auch jede Wirbellinie dauernd von denselben Teilchen gebildet.

§ 6. Sätze aus der Potentialtheorie.

103. Greensche Formeln. Im Gaußschen Integralsatz (31)

$$\int \nabla \cdot \mathfrak{v}\, d\tau = \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$$

soll

$$\mathfrak{v} = U \nabla V$$

gesetzt werden, wo U und V zwei skalare Feldfunktionen bedeuten. Es ist nach Ziff. 80 (III) unter Benutzung von (VII):

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \nabla \cdot (U \nabla V) = (\nabla U) \cdot \nabla V + U \triangle V.$$

Der Gaußsche Integralsatz ergibt dann:

$$\int (\nabla U) \cdot \nabla V d\tau + \int U \triangle V d\tau = \int U \nabla V \cdot d\mathfrak{o} = \int U \frac{\partial V}{\partial n} do. \qquad (77)$$

Wenn man in dieser Gleichung U mit V vertauscht und die so entstehende Gleichung von (77) subtrahiert, erhält man:

$$\int (U \triangle V - V \triangle U) d\tau = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) do. \qquad (78\text{a})$$

Setzt man in der Gleichung (77) $V = U$, so erhält man:

$$\int |\nabla U|^2 d\tau + \int U \triangle U d\tau = \int U \frac{\partial U}{\partial n} do. \qquad (78\text{b})$$

Die beiden Gleichungen (78a, b) werden als Greensche Formeln bezeichnet. Sie gelten wie der Gaußsche Integralsatz in dieser Form unter der Voraussetzung, daß die Normale nach außen gerichtet ist. Die beiden Funktionen U und V müssen eindeutig und mit ihren ersten Ableitungen stetig sein.

Für Gebiete, die ins Unendliche reichen, bleiben die Greenschen Formeln (78a) und (78b) gültig, wenn die Funktionen U und V im Unendlichen von erster Ordnung und ihre ersten Ableitungen von zweiter Ordnung verschwinden. Man betrachtet an Stelle des ins Unendliche reichenden Gebietes zunächst ein Gebiet, das außen von einer Kugel von so großem Radius R begrenzt ist, daß alle etwaigen anderen Begrenzungsflächen in ihrem

Inneren liegen. Dann ist das Hüllenintegral auf der rechten Seite von (78a) und (78b) auch über diese Kugel zu erstrecken; führt man den zu einem Oberflächenelement do gehörigen räumlichen Zentriwinkel $d\varepsilon$ ein, setzt also $do = R^2 d\varepsilon$, und läßt den Radius R über alle Grenzen wachsen, so erkennt man, daß die Hüllenintegrale über die Kugel gegen Null konvergieren.

104. Eindeutigkeitssatz. Als erste Anwendung der Greenschen Formeln soll folgender Satz bewiesen werden:

Ein Vektor $\mathfrak{v}$ ist in einem endlichen einfach zusammenhängenden Gebiet T eindeutig bestimmt, wenn in jedem Punkt im Innern dieses Gebietes $\operatorname{div} \mathfrak{v} = \varrho$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ bekannt ist und wenn in jedem Punkt der Begrenzung F des Gebiets die Normalkomponente $\bar{\mathfrak{v}}_n$ von $\bar{\mathfrak{v}}$ bekannt ist. (Durch Überstreichen sollen die Werte an der Begrenzung gekennzeichnet werden.) (Fig. 53.)

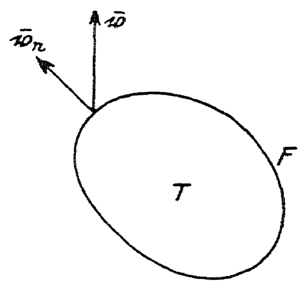


Fig. 53.

Um diesen Satz zu beweisen, nimmt man an, es gäbe zwei verschiedene Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$, die allen angegebenen Bedingungen genügen. Dann würde ihre Differenz

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}'$$

folgende drei Gleichungen erfüllen:

$$\text{(a)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \qquad \text{(b)} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{D} = 0, \qquad \text{(c)} \quad \bar{\mathfrak{D}}_n = 0.$$

Es läßt sich zeigen, daß nur der Vektor $\mathfrak{D} = 0$ diese drei Gleichungen erfüllt. Aus (b) folgt nach Ziff. 93, daß $\mathfrak{D}$ ein Gradient ist, also etwa

$$\mathfrak{D} = \operatorname{grad} H = \nabla H.$$

Dann ist nach (a)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} H = \triangle H = 0$$

und nach (c)

$$\mathfrak{n} \cdot \nabla H = \frac{\partial H}{\partial n} = 0.$$

Ersetzt man in der Greenschen Formel (78b) U durch H und berücksichtigt die beiden letzten Gleichungen, so bleibt nur der erste Summand der linken Seite stehen:

$$\int |\nabla H|^2 d\tau = 0.$$

Hieraus folgt, daß ∇H im ganzen Gebiet T verschwindet; denn für jeden von Null verschiedenen Wert von ∇H wäre das Integral positiv. Damit ist das Verschwinden von $\mathfrak{D}$ und die Identität von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ nachgewiesen. Es gibt also in dem Gebiet T wenn über-

haupt einen, jedenfalls nur einen Vektor $\mathfrak{v}$, dessen Divergenz und Rotation in jedem Punkt des Gebietes die vorgeschriebenen Werte annehmen und der die vorgeschriebene Grenzbedingung erfüllt.

Für ein ins Unendliche reichendes Gebiet ist der Beweis gültig, wenn H im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwindet, wobei r den Betrag des Ortsvektors eines ins Unendliche rückenden Punktes bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung ist der Greensche Satz auf unendliche Gebiete anwendbar. Dann muß aber $\mathfrak{D} = \nabla H$ wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden; die Bedingung (c) allein genügt nicht. Setzt man voraus, daß $\mathfrak{v}$ selbst im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden soll, dann gilt das gleiche von $\mathfrak{D}$ und der Beweis für die Eindeutigkeit von $\mathfrak{v}$ bleibt richtig.

105. Laplacesches Feld. Wenn ein Vektor $\mathfrak{v}$ in einem endlichen Gebiet T gleichzeitig quellen- und wirbelfrei ist, wenn also in T

$$\alpha)\quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0,$$

$$\beta)\quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

gilt, so ist $\mathfrak{v}$ der Gradient eines skalaren Feldes, also

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} U = \nabla U$$

und die skalare Feldfunktion U genügt der Laplaceschen Gleichung

$$\triangle U = 0 .$$

Ein derartiges skalares Feld U wird als Laplacesches Feld bezeichnet.

Die Bestimmung eines Laplaceschen Feldes aus solchen Angaben über das Verhalten der Funktion U an der Begrenzung, die die Aufgabe eindeutig machen, führt auf die Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Als erste Randwertaufgabe bezeichnet man die Aufgabe, ein Laplacesches Feld U zu bestimmen, wenn an der Begrenzung von T die Werte $\bar{U}$ von U selbst gegeben sind; als zweite Randwertaufgabe die Aufgabe, ein Laplacesches Feld zu bestimmen, wenn an der Begrenzung von T die Werte $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n}$ gegeben sind. Die Eindeutigkeit der zweiten Randwertaufgabe für den Vektor $\mathfrak{v} = \nabla U$, nicht für U selbst, folgt aus dem allgemeinen Eindeutig-

keitssatz. Der Beweis für die Eindeutigkeit der ersten Randwertaufgabe läßt sich auf dem gleichen Wege führen[1]).

Wenn das Gebiet T in den ganzen unendlich ausgedehnten Raum R übergeht und von der Funktion U vorausgesetzt wird, daß sie im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwindet, so ist

$$U = 0$$

die einzige Lösung der Laplaceschen Gleichung.

106. Folgerungen aus den Greenschen Formeln. Aus der Greenschen Formel

$$\int (U \triangle V - V \triangle U) d\tau = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) do \tag{79}$$

ergeben sich wichtige Folgerungen, wenn man U durch $\frac{1}{r}$ ersetzt, wo r die Entfernung eines veränderlichen Aufpunkts Q von einem festen Punkt P, dem Pol, bedeutet. Dabei sind zwei Fälle auseinanderzuhalten, je nachdem der Pol P dem Integrationsgebiet T angehört oder nicht.

Der einfachere Fall ist der zweite: P sei ein äußerer Punkt (Fig. 54); dann ist r für alle Punkte Q von T von Null verschieden, also $\triangle \frac{1}{r} = 0$; mithin wird nach (79)

$$0 = -\int_T \frac{1}{r} \triangle V d\tau + \int_F \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) do. \tag{80}$$

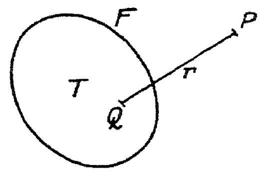


Fig. 54.

Dabei ist mit F die Begrenzung des Gebietes T bezeichnet.

Der wichtigere Fall ist der erste: P sei ein innerer Punkt (Fig. 55); wenn dann Q mit P zusammenfällt, wird r Null, $\triangle \frac{1}{r}$ unbestimmt. Um den Greenschen Satz (79) anwenden zu können, der die Endlichkeit und Stetigkeit von U und V erfordert, schneidet man aus T eine kleine Kugel vom Radius a um P als Mittelpunkt

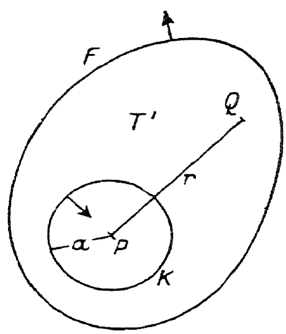


Fig. 55.

1) Die Methoden zur Lösung der Randwertaufgaben sowie die Frage der Existenz einer Lösung gehören der Potentialtheorie an und sollen hier nicht behandelt werden.

aus. Für das Restgebiet T' gilt dann die Greensche Formel, wobei das Oberflächenintegral über die ursprüngliche Begrenzung F und über die Kugel K zu erstrecken ist. An der Kugelfläche ist die äußere Normale des Gebietes T' auf P zu gerichtet. Also

$$\int_{T'}\left(\frac{1}{r}\triangle V - V\triangle\frac{1}{r}\right)d\tau = \int_F\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)do - \int_K\left(\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial a} + V\frac{1}{a^2}\right)do. \tag{81}$$

Für das Oberflächenelement der Kugel setzt man

$$do = a^2 d\varepsilon,$$

wo $d\varepsilon$ den räumlichen Zentriwinkel bedeutet. Dann wird das Hüllenintegral über die Kugel:

$$\int_K\left(\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial a} + V\frac{1}{a^2}\right)do = a\int_K\frac{\partial V}{\partial a}d\varepsilon + \int_K V d\varepsilon.$$

Läßt man den Radius a der Kugel gegen Null konvergieren, so verschwindet auf der rechten Seite der erste Summand, während der zweite gegen $4\pi V_P$ geht, wo V_P der Wert von V im Punkt P ist. (Genügt überdies V in T der Laplaceschen Gleichung, so ist $\int_K V d\varepsilon$ vom Kugelradius unabhängig; die Gleichung $\int_K V d\varepsilon = 4\pi V_P$ wird als Satz vom arithmetischen Mittel bezeichnet.)

Das Raumintegral auf der linken Seite von (81) reduziert sich auf $\int_{T'}\frac{1}{r}\triangle V d\tau$, da $\triangle\frac{1}{r}$ in allen Punkten von T' verschwindet. Wenn der Kugelradius gegen Null konvergiert, besitzt T' das ursprüngliche Gebiet T als Grenzwert, erreicht aber den Grenzwert nicht; der Punkt P bleibt immer ausgeschlossen. Trotzdem ist

$$\lim_{a\to 0}\int_{T'}\frac{1}{r}\triangle V d\tau = \int_T\frac{1}{r}\triangle V d\tau.$$

Um das zu zeigen, weist man nach, daß $\int\frac{1}{r}\triangle V d\tau$ über den Inhalt der ausgeschlossenen Kugel den Grenzwert Null besitzt. Bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten wird

$$\int\frac{1}{r}\triangle V d\tau = \int\frac{1}{r}\triangle V r^2 dr d\varepsilon = \int\triangle V r dr d\varepsilon$$

und dieses Integral konvergiert für endliches $\triangle V$ gegen Null, wenn der Kugelradius a gegen Null geht.

Damit folgt aus (81):

$$4\pi V_P = -\int_T \frac{1}{r} \triangle V d\tau + \int_F \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) do. \tag{82}$$

Wendet man diese Formel (82) auf den ganzen unendlichen Raum R an und setzt voraus, daß die Funktion V im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwindet, so verschwindet das Oberflächenintegral über die ins Unendliche rückende Begrenzung F. Also wird für jeden Raumpunkt P:

$$4\pi V_P = -\int_R \frac{1}{r} \triangle V d\tau. \tag{82a}$$

Aus dieser Gleichung wird im weiteren Verlauf eine Folgerung gezogen für den Fall, daß V das Newtonsche Potential einer Massenverteilung ist.

107. Gravitationspotential. Das Potentialfeld einer Massenverteilung, ihr „Gravitationsfeld", wird in der Weise erhalten, daß man jedem Punkt des Raumes die potentielle Energie zuordnet, die dort eine Masse Eins unter dem Einfluß der Anziehung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz besitzen würde. Gleichzeitig mit diesem skalaren Feld ist das Feld des zugehörigen Gradienten zu betrachten. Da die Newtonsche Anziehungskraft, die an der Masse Eins angreift, nach (51) gleich dem Potentialgefälle ist, ist das Feld dieser Kraft mit dem Gradientenfeld im wesentlichen, d. h. bis auf den Richtungssinn identisch.

Es soll zuerst das Feld eines einzelnen Massepunktes Q mit der Masse m untersucht werden. In einem Aufpunkt P, in dem die Masse Eins gedacht wird, greift eine Kraft

$$\mathfrak{K} = -f \frac{m}{r^2} \mathfrak{e} \tag{83}$$

an. Dabei bedeutet r die Entfernung QP, $\mathfrak{r}$ den von Q nach dem Aufpunkt P führenden Vektor; $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{r}}{r}$ den Einheitsvektor dieser Richtung. f die Konstante der allgemeinen Gravitation (Fig. 56).

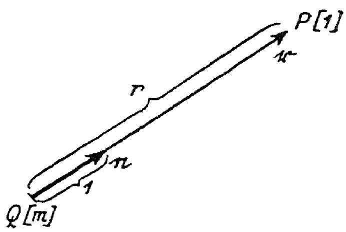


Fig. 56.

Es muß jetzt das Potential der Kraft $\mathfrak{K}$ aufgestellt werden. Nach (27) ist

$$\nabla_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{e}}{r^2};$$

man kann also $\mathfrak{K}$ nach (83) in die Form bringen:

$$\mathfrak{K} = fm \underset{p}{\nabla} \frac{1}{r}.$$

$\mathfrak{K}$ nimmt also in der Tat die Form eines Potentialgefälles an:

$$\mathfrak{K} = -\underset{p}{\nabla} V,$$

wenn

$$V = -f\frac{m}{r} \tag{84}$$

gesetzt wird. V ist das Newtonsche Potential der Masse m.

Das Potential einer kontinuierlichen Masseverteilung ist

$$V = -f\int\frac{dm}{r}.$$

Dabei ist die Integration über das masseerfüllte Gebiet zu erstrecken, das nicht ins Unendliche reichen soll. dm ist die im Raumelement $d\tau$ enthaltene Masse. Bezeichnet man mit ϱ ihre Dichte, so ist $dm = \varrho\, d\tau$. Damit wird

$$V = -f\int\frac{\varrho\, d\tau}{r}. \tag{84a}$$

Für die Newtonsche Anziehungskraft ergibt sich:

$$\mathfrak{K} = -\underset{p}{\nabla} V = f\underset{p}{\nabla}\int\frac{\varrho\, d\tau}{r}. \tag{85}$$

Damit ist das Kraftfeld berechnet.

Vielfach wird unter Weglassung des Faktors $-f$ die Funktion

$$V = \int\frac{\varrho\, d\tau}{r} \tag{86}$$

selbst studiert und als Newtonsches Potential bezeichnet. Wie hier nicht gezeigt werden soll, ist das Newtonsche Potential einer Massenverteilung, deren Dichte überall endlich ist, im ganzen Raum eindeutig, endlich, und samt seinen ersten Ableitungen stetig. In allen Punkten, die außerhalb der Massen liegen, d. h. in allen Punkten, in denen die Massendichte $\varrho = 0$ ist, genügt es der Laplaceschen Gleichung:

$$\triangle V = 0.$$

In der Tat! Berechnet man

$$\triangle V = \triangle\int\frac{\varrho\, d\tau}{r} = \int\varrho \triangle \frac{1}{r}\, d\tau$$

für einen derartigen Punkt, so verschwindet $\triangle \frac{1}{r}$ nach (25) im ganzen Integrationsbereich, nämlich dem von Massen erfüllten Gebiet, weil der Punkt $r = 0$ selbst dem Integrationsbereich nicht angehört.

Für Punkte, die innerhalb der Massen liegen. d. h. an denen $\varrho \neq 0$ ist, gilt die Laplacesche Gleichung nicht; sie wird dort durch die Poissonsche Gleichung ersetzt.

108. Poissonsche Gleichung. Um $\triangle V$ für Punkte zu berechnen, die innerhalb der Massen liegen, geht man von der Gleichung (82a) aus:

$$4\pi V_P = -\int_R \frac{1}{r} \triangle V d\tau.$$

Dabei soll V das Newtonsche Potential der im Raum R verteilten Massen sein:

$$V = \int_R \frac{\varrho}{r} d\tau.$$

Diese Massen werden durch eine beliebige geschlossene Fläche F, die den Punkt P umschließt und den Raum R in zwei Gebiete, ein inneres T' und ein äußeres T'', zerlegt, in zwei Teile geteilt (Fig. 57); ihre Potentiale in P sollen entsprechend mit V' und V'' bezeichnet werden. Für das Potential der inneren Massen gilt jedenfalls:

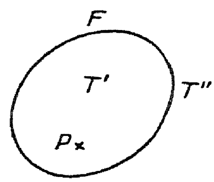


Fig. 57.

$$4\pi V'_P = -\int_R \frac{1}{r} \triangle V' d\tau.$$

Die rechte Seite kann durch $-\int_{T'} \frac{1}{r} \triangle V' d\tau$ ersetzt werden, weil $\triangle V'$ in T'' verschwindet; sie kann dann auch durch $-\int_{T'} \frac{1}{r} \triangle V d\tau$ ersetzt werden, weil $\triangle V''$ in T' verschwindet; also

$$4\pi V'_P = -\int_{T'} \frac{1}{r} \triangle V d\tau.$$

Nun ist aber

$$V'_P = \int_{T'} \frac{\varrho}{r} d\tau$$

als Potential der inneren Massen; also gilt

$$\int_{T'} \frac{\triangle V + 4\pi\varrho}{r} d\tau = 0$$

für jedes Gebiet T', das den, übrigens beliebigen, Punkt P enthält. Hieraus folgt, daß die zu integrierende Funktion identisch Null sein muß; folglich ist

$$\triangle V = -4\pi\varrho. \tag{87}$$

Diese Gleichung heißt die Poissonsche Gleichung.

In Punkten, in denen $\varrho = 0$ ist, geht die Poissonsche Gleichung von selbst in die Laplacesche Gleichung über.

Ist umgekehrt eine Poissonsche Gleichung

$$\triangle V = -4\pi\varrho \tag{87a}$$

gegeben, so besitzt sie ein Integral:

$$V = \int\limits_R \frac{\varrho\, d\tau}{r}. \tag{87b}$$

Dieses Integral besitzt die Form eines Newtonschen Potentials, ist also im ganzen Raum R endlich, eindeutig und mit seinen ersten Ableitungen stetig und verschwindet im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist es das einzige Integral der Poissonschen Gleichung, welches diese Eigenschaften besitzt; denn wenn ein zweites Integral V' mit denselben Eigenschaften existieren würde, so hätte auch die Differenz $V - V'$ die gleichen Eigenschaften, würde aber im ganzen Raum der Laplaceschen Gleichung genügen. Nach Ziff. 105 müßte $V - V'$ im ganzen Raum Null sein.

§ 7. Berechnung eines Vektorfeldes aus seinem Quellen- und Wirbelfeld.

109. Vorbemerkung: Ziel der Untersuchung. Nach dem Eindeutigkeitssatz (Ziff. 104) ist ein Vektorfeld durch Angabe seiner Quellen und Wirbel im wesentlichen bestimmt. Erstreckt sich das Vektorfeld ins Unendliche, so ist die Bestimmung eindeutig, wenn über das Verhalten des Feldvektors im Unendlichen die Voraussetzung gemacht wird, daß er wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Ist das Vektorfeld durch eine oder mehrere geschlossene Flächen begrenzt, so sind zur Eindeutigkeit noch Angaben über den Vektor auf der Begrenzung notwendig.

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Entwicklung von Methoden zur Berechnung des Feldvektors aus den Quellen und Wirbeln des Feldes.

110. Reines Quellenfeld von unendlicher Ausdehnung. Es soll ein Vektorfeld berechnet werden, das im ganzen unendlich ausgedehnten Raum R wirbelfrei ist und dessen Divergenz e in jedem Punkt gegeben ist; dabei soll e überall endlich sein; im Unendlichen sollen keine Quellen liegen. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist der Feldvektor $\mathfrak{v}$ aus den Gleichungen:

$$\alpha)\quad \operatorname{div} \mathfrak{v} = e,$$
$$\beta)\quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$$

eindeutig bestimmt. Ein wirbelfreier Vektor ist stets ein Gradient

(Ziff. 93); also kann

$$\mathfrak{v} = \text{grad}\, U$$

gesetzt werden. Dann wird α)

$$\text{div grad}\, U = \triangle U = e.$$

Diese Gleichung hat die Form einer Poissonschen Gleichung. Also ist nach (87a, b)

$$U = -\int \frac{e\, d\tau}{4\pi r}$$

und mithin

$$\mathfrak{v} = -\text{grad} \int \frac{e\, d\tau}{4\pi r}. \tag{88}$$

U besitzt die Eindeutigkeits- und Stetigkeitseigenschaften eines Newtonschen Potentials. Infolgedessen ist auch $\mathfrak{v}$ im ganzen Raum eindeutig und stetig und verschwindet im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$.

Nach dem Eindeutigkeitssatz ist also $\mathfrak{v}$ der gesuchte Feldvektor.

Das Feld einer isolierten, punktförmigen Quelle von endlicher Ergiebigkeit E hat den Feldvektor

$$\mathfrak{v} = -\text{grad}\, \frac{E}{4\pi r}; \tag{89}$$

das Feld besitzt ein Potential

$$U = -\frac{E}{4\pi r}. \tag{89a}$$

111. Reines Wirbelfeld von unendlicher Ausdehnung. Es soll ein Vektorfeld berechnet werden, das im ganzen, unendlich ausgedehnten Raum R quellenfrei ist und dessen Rotation $\mathfrak{w}$ in jedem Punkt gegeben ist: im Unendlichen soll $\mathfrak{w}$ Null sein. Der Feldvektor $\mathfrak{v}$ soll den beiden Gleichungen

$$\alpha) \quad \text{div}\, \mathfrak{v} = 0,$$

$$\beta) \quad \text{rot}\, \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

genügen. Es ist nicht zu übersehen, daß $\mathfrak{w}$ nicht als beliebiger Vektor gegeben werden kann, sondern daß wegen Ziff. 81 (X)

$$\gamma) \quad \text{div}\, \mathfrak{w} = 0$$

sein muß.

Man setzt versuchsweise

$$\mathfrak{v} = \text{rot}\, \mathfrak{W}. \tag{90}$$

Durch diesen Ansatz wird die Gleichung (α) identisch erfüllt. Wenn es gelingt, $\mathfrak{W}$ so zu bestimmen, daß auch die zweite Gleichung befriedigt ist, so ist nach dem Eindeutigkeitssatz die einzige Lösung

des Problems gefunden. Die Gleichung (β) gibt zur Bestimmung von $\mathfrak{W}$ die Bedingung:

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathfrak{W} = \mathfrak{w}$$

oder nach (XI):

$$\text{grad}\,\text{div}\,\mathfrak{W} - \triangle\,\mathfrak{W} = \mathfrak{w}. \tag{91}$$

Wenn es einen Vektor gibt, der diese Bedingung, also auch (β) erfüllt, so gibt es unendlich viele Vektoren, die sie erfüllen; denn $\mathfrak{W}$ ist durch den Ansatz (90) nur bis auf einen additiven Gradienten bestimmt. Man kann also versuchen, den Vektor $\mathfrak{W}$ noch einer weiteren Bedingung zu unterwerfen; und zwar soll

$$-\triangle\,\mathfrak{W} = \mathfrak{w} \tag{92}$$

sein. Hieraus folgt wegen (γ):

$$\triangle\,\text{div}\,\mathfrak{W} = 0.$$

Da diese Gleichung im ganzen Raum erfüllt sein soll, ist div $\mathfrak{W}$ im ganzen Raum konstant, und zwar Null, wenn $\mathfrak{W}$ im Unendlichen verschwindet.

Die Bedingung (92) widerspricht also der Bedingung (91) nicht. Die Lösung der Aufgabe ist auf die Integration von (92) zurückgeführt.

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der Poissonschen Gleichung überein und geht für die Maßzahlen für $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{w}$ in die Poissonsche Gleichung für skalare Funktionen über. Ein Vektor, der einer Poissonschen Gleichung genügt, heißt ein Vektorpotential.

Das Integral der Poissonschen Gleichung (92) wird, wenn die Maßzahlen von $\mathfrak{w}$ den für die Integration der Poissonschen Gleichung erforderlichen Bedingungen genügen,

$$\mathfrak{W} = \int \frac{\mathfrak{w}\,d\tau}{4\pi r}, \tag{93}$$

mithin ist nach (90)

$$\mathfrak{v} = \text{rot} \int \frac{\mathfrak{w}\,d\tau}{4\pi r} \tag{94}$$

der gesuchte Feldvektor.

112. Berechnung eines unendlich ausgedehnten Feldes aus seinen Quellen und Wirbeln. Es soll jetzt ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$ berechnet werden, das den ganzen Raum R erfüllt und dessen Divergenz e und Rotation $\mathfrak{w}$ in jedem Punkt Q gegeben ist; es soll also:

$$\alpha)\quad \text{div}\,\mathfrak{v} = e \quad \text{oder} \quad \underset{Q}{\nabla} \cdot \mathfrak{v} = e,$$

$$\beta)\quad \text{rot}\,\mathfrak{v} = \mathfrak{w} \quad \text{oder} \quad \underset{Q}{\nabla} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

sein, wobei $\mathfrak{w}$ der Bedingung

$$\gamma)\quad \text{div}\,\mathfrak{w} = 0$$

genügen muß.

Man zerlegt hierzu $\mathfrak{v}$ in eine wirbelfreie Komponente $\mathfrak{v}_1$ und eine quellenfreie Komponente $\mathfrak{v}_2$; es soll also

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

gesetzt werden, wobei $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ den Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{v}_1 = e, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{v}_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{v}_2 = 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}. \end{cases}$$

Dann ist nach (88) und (94)

$$\mathfrak{v}_1 = -\operatorname{grad} \int \frac{e\,d\tau}{4\pi r},$$

$$\mathfrak{v}_2 = \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{w}\,d\tau}{4\pi r},$$

also der gesuchte Feldvektor in einem Aufpunkt P

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad} \int \frac{e\,d\tau}{4\pi r} + \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{w}\,d\tau}{4\pi r} \tag{95}$$

oder

$$\mathfrak{v} = -\nabla_P \int \frac{\nabla_Q \cdot \mathfrak{v}}{4\pi r}\,d\tau + \nabla_P \times \int \frac{\nabla_Q \times \mathfrak{v}}{4\pi r}\,d\tau. \tag{95'}$$

Damit ist die Berechnung eines den ganzen Raum erfüllenden Feldes aus seinen Quellen und Wirbeln durchgeführt.

113. Begrenztes Feld. Die Angabe der Divergenz e und der Rotation $\mathfrak{w}$ eines Feldvektors $\mathfrak{v}$ in einem *begrenzten Gebiet* T, das etwa den Innenraum einer geschlossenen Fläche F erfüllt, genügt nicht zur eindeutigen Bestimmung von $\mathfrak{v}$. Die Aufgabe wird erst eindeutig, wenn noch an der Begrenzung F die Normalkomponente $\mathfrak{v}_n$ von $\mathfrak{v}$ vorgeschrieben wird.

Um zunächst einen Vektor $\mathfrak{v}'$ zu finden, der ohne Rücksicht auf die Grenzbedingung die vorgeschriebene Divergenz und Rotation in T besitzt, genügt es, auch im Außenraum T' von F Divergenz und Rotation in beliebiger Weise vorzuschreiben und den Feldvektor $\mathfrak{v}'$ in dem unendlich ausgedehnten Feld $T + T'$ nach der Methode von Ziff. 112 zu berechnen. Dieser Feldvektor $\mathfrak{v}'$ wird die vorgeschriebene Grenzbedingung nicht erfüllen, vielmehr eine Normalkomponente $\bar{\mathfrak{v}}_n'$ besitzen, die von $\bar{\mathfrak{v}}_n$ verschieden ist.

Um auch die Grenzbedingung zu erfüllen, hat man zu $\mathfrak{v}'$ einen Vektor $\mathfrak{v}''$ hinzuzufügen, der in T verschwindende Divergenz und Rotation besitzt und dessen Normalkomponente an F

$$\bar{\mathfrak{v}}_n'' = \bar{\mathfrak{v}}_n - \bar{\mathfrak{v}}_n'$$

ist. Dieser Vektor $\mathfrak{v}''$ ist in T der Gradient eines *Laplaceschen*

Feldes, und seine Bestimmung erfordert die Lösung einer zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie [vgl. Ziff. 105].

114. Feld eines einzelnen Wirbelfadens. Wenn der Feldvektor $\mathfrak{v}$ im ganzen unendlichen Raum quellenfrei ist und seine Rotation

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

an jeder Stelle Q des Feldes gegeben ist, so hat der Feldvektor $\mathfrak{v}$ nach (94) die Form:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{w}\, d\tau}{4\pi r}.$$

Ist nur eine einzige dünne Wirbelröhre vorhanden, so ist ihr Raumelement:

$$d\tau = d\mathfrak{o} \cdot d\mathfrak{s},$$

wo $d\mathfrak{o}$ einen orientierten Querschnitt und $d\mathfrak{s}$ ein gerichtetes Linienelement einer mittleren Wirbellinie bedeutet (Fig. 58).

Die Zirkulation

$$\Gamma = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} = \mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{o}$$

besitzt an jedem Querschnitt denselben Wert, und zwar unabhängig davon, ob man $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit der Strömung einer idealen Flüssigkeit deuten will oder nicht.

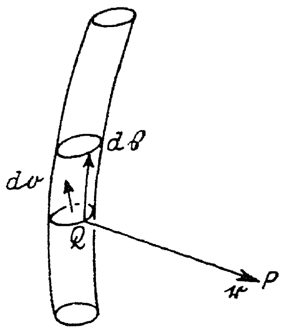


Fig. 58.

Nach Einführung von $d\mathfrak{o}$ und $d\mathfrak{s}$ wird

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{w}\, d\mathfrak{o} \cdot d\mathfrak{s}}{4\pi r}.$$

Bemerkt man, daß $\mathfrak{w}$ und $d\mathfrak{s}$ gleichgerichtete Vektoren sind, so kann man dafür schreiben:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \int \frac{d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{w}}{4\pi r}$$

oder unter Einführung der Zirkulation Γ

$$\mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{rot} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{96}$$

Da in dieser Gleichung der Querschnitt der Wirbelröhre nicht mehr vorkommt, kann man $\mathfrak{v}$ auch als den Feldvektor des Feldes *einer isolierten Wirbellinie* von endlicher Stärke auffassen. Nach der Ableitung in Ziff. 111 müssen die Wirbellinien geschlossen sein; man kann indessen durch einen in der Potentialtheorie gebräuchlichen Grenzübergang zeigen, daß die Gleichung (96) auch für einen geradlinigen, beiderseits ins Unendliche gehenden Wirbelfaden gilt und einen Feldvektor von endlichem Betrag ergibt.

Bei weiteren Umformungen der Gleichung (96) kommen wiederholt Anwendungen des Operators ∇ auf r oder auf eine Funktion von r vor. Die Differentiationen sind teils in einem Punkt Q der Wirbellinie, teils im Aufpunkt P auszuführen. Es ist also notwendig, den Differentiationsort zu bezeichnen. Auch muß man sich erinnern, daß ein Wechsel des Differentiationsortes einen Vorzeichenwechsel des ersten Differentialquotienten zur Folge hat [Ziff. 82 (28)].

Nach (96) ist

$$\mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_P \times \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \nabla_P \frac{1}{r} \times d\mathfrak{s}. \tag{97}$$

Die Ausführung der Differentiation nach (27) ergibt:

$$\mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}. \tag{98}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{e}$ den Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{r}$.

Zu $\mathfrak{v}$ liefert jedes Element $d\mathfrak{s}$ der Wirbellinie einen Beitrag:

$$\frac{\Gamma}{4\pi} d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in Richtung $d\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}$ und mit α den Winkel zwischen $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$, so nimmt dieser Beitrag die Form an (Fig. 59):

$$\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \sin\alpha\, \mathfrak{t},$$

die aus dem Biot-Savartschen Gesetz der Elektrodynamik bekannt ist. Man erkennt, daß das Biot-Savartsche Gesetz von sehr viel größerer Allgemeinheit ist. Es bestimmt den Feldvektor eines den ganzen Raum erfüllenden Feldes, das außer einer Wirbellinie keine Singularitäten enthält.

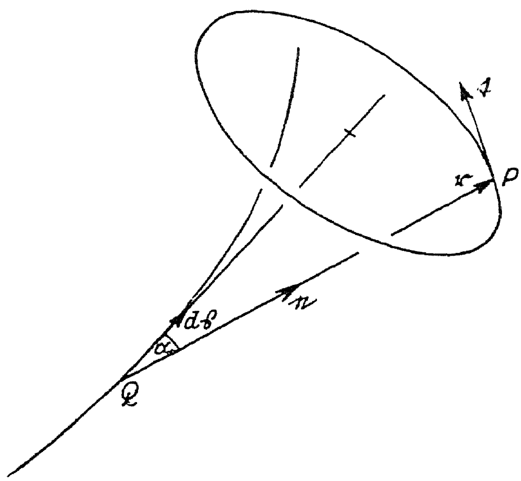


Fig. 59.

Der in (97) gefundene Ausdruck für $\mathfrak{v}$ läßt sich mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes umformen. Denkt man sich in die Wirbellinie eine Fläche eingespannt, so wird nach (56)

$$\oint d\mathfrak{s} \times \nabla_P \frac{1}{r} = \int (d\mathfrak{o} \times \nabla_Q) \times \nabla_P \frac{1}{r}.$$

Die Differentiation $\underset{Q}{\nabla}$ ist in den Punkten Q der eingespannten Fläche auszuführen, über die die Integration zu erstrecken ist. Durch Anwendung des Entwicklungssatzes auf das dreifache Vektorprodukt ergibt sich:

$$\oint d\mathfrak{s} \times \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} = \int \underset{Q}{\nabla} \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{o} - \int d\mathfrak{o} \underset{Q}{\nabla} \cdot \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \tag{99}$$

Das letzte Integral verschwindet, denn es ist

$$\underset{Q}{\nabla} \cdot \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} = - \underset{P}{\nabla} \cdot \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} = - \triangle \frac{1}{r} = 0$$

für jeden Aufpunkt P, der der Fläche nicht angehört. Dann wird

$$\oint d\mathfrak{s} \times \underset{P}{\nabla} \frac{1}{r} = \underset{P}{\nabla} \int \underset{Q}{\nabla} \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{o}$$

und mithin

$$\mathfrak{v} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \underset{P}{\nabla} \int \underset{Q}{\nabla} \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{o}. \tag{100}$$

Der Vektor $\mathfrak{v}$ stellt sich als Gradient dar:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

wo

$$\varphi = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \underset{Q}{\nabla} \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{o} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do \tag{100a}$$

ist [vgl. Ziff. 75 (11)].

Das von einer einzelnen Wirbellinie erzeugte Feld besitzt also ein Potential in allen Punkten, welche der Wirbellinie nicht angehören. Man könnte daran denken, daß auch in den Punkten der eingespannten Fläche kein Potential existiert, weil $\triangle \frac{1}{r}$ für einen der Fläche angehörigen Aufpunkt Q nicht verschwindet. Indessen liefert $d\mathfrak{o} \triangle \frac{1}{r}$ zu dem zweiten Integral von (99) keinen endlichen Beitrag, wie man am einfachsten daraus ersieht, daß die eingespannte Fläche willkürlich ist, also so verändert werden kann, daß sie diesen Aufpunkt Q nicht enthält.

115. Räumlicher Sehwinkel. Das Potential einer Wirbellinie (100a) in einem Aufpunkt P läßt eine geometrische Deutung zu; es ist nämlich bis auf einen konstanten Faktor gleich dem räumlichen Sehwinkel, unter dem die Wirbellinie von P aus erscheint (Fig. 60).

Es soll mit $d\varepsilon$ der Sehwinkel bezeichnet werden, unter dem ein

Flächenelement $d\mathfrak{o} = \mathfrak{n} do$ am Orte Q von P aus erscheint. Projiziert man das Flächenelement auf die Normalebene zu $\mathfrak{r}$ in Q, so ist die Größe der Projektion einerseits $d\mathfrak{o} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r}$, andrerseits unter Benutzung des Sehwinkels $r^2 d\varepsilon$. Durch die Gleichung:

$$r^2 d\varepsilon = d\mathfrak{o} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r}$$

wird festgesetzt, daß der Sehwinkel dann positiv zu rechnen ist, wenn die positive Normale in Q und der nach dem Aufpunkt P führende Vektor einen spitzen Winkel bilden.

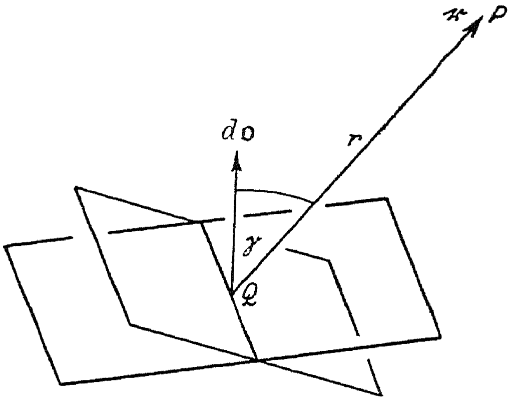


Fig. 60.

Damit wird nach (27) mit Rücksicht auf (28):

$$d\varepsilon = d\mathfrak{o} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = d\mathfrak{o} \cdot \underset{Q}{\nabla} \frac{1}{r}$$

und der Sehwinkel ε, unter dem die Wirbellinie erscheint,

$$\varepsilon = \int d\mathfrak{o} \cdot \underset{Q}{\nabla} \frac{1}{r} = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do. \tag{101}$$

Wenn die Zirkulation $\Gamma = -4\pi$ ist, so ist nach (100a) das Potential des von der Wirbellinie erzeugten Feldes dem Sehwinkel gleich; allgemein hängt das Potential mit dem Sehwinkel durch die Gleichung

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \varepsilon \tag{102}$$

zusammen.

Bewegt sich der Aufpunkt auf einer geschlossenen Linie, welche die eingespannte Fläche durchsetzt, um die Wirbellinie herum, so ändert sich der räumliche Sehwinkel um $\pm 4\pi$ (je nach der Umlaufsrichtung). Infolgedessen ist das Potential einer Wirbellinie zyklisch, d. h. es ändert sich bei einem vollen Umlauf des Aufpunkts um die Wirbellinie auf einem beliebigen Weg um den festen Wert $\pm \Gamma$ je nach dem Umlaufssinn.

116. Doppelquellen. Die Gleichung (100a) besitzt einen hydrodynamischen Sinn, den man erkennt, wenn man den Begriff der Doppelquelle einführt.

Eine Quelle von der Ergiebigkeit E und eine ebenso starke Senke bilden ein Quellpaar. Läßt man sich die Quelle der Senke

unbegrenzt nähern und gleichzeitig die Ergiebigkeit so zunehmen, daß das Produkt aus der Ergiebigkeit und dem Abstand der beiden Punkte beim Grenzübergang einen endlichen Grenzwert m besitzt, so entsteht eine Doppelquelle; m heißt das Moment der Doppelquelle.

Das Feld einer Doppelquelle besitzt ein Potential, das man in folgender Weise erhält (Fig. 61). Eine einfache Quelle Q von der Ergiebigkeit E erregt ein Feld mit dem Potential

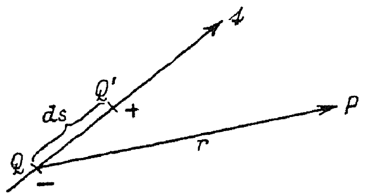


Fig. 61.

$$-\frac{E}{4\pi r}.$$

Verschiebt man die Quelle um $d\mathfrak{s}$ nach Q' und bringt in Q eine ebenso starke Senke an, so besitzt dieses Quellpaar ein Potential

$$\varphi = -d\mathfrak{s}\cdot\underset{Q}{\nabla}\frac{E}{4\pi r}.$$

Nun ersetzt man $d\mathfrak{s}$ durch $\mathfrak{t}\,ds$, wo $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor der von der Senke zur Quelle führenden Richtung bedeutet und setzt fest, daß dsE den Grenzwert m besitzen soll. Dann wird das Potential des von der Doppelquelle vom Moment m erregten Feldes:

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi}\mathfrak{t}\cdot\underset{Q}{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{m}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}. \tag{103}$$

Schreibt man nun das Potential des von einer einzelnen Wirbellinie erzeugten Feldes (100a) in der Form:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \Gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}do, \tag{104}$$

so erkennt man, daß man die Wirbellinie durch eine Verteilung von Doppelquellen auf einer beliebigen eingespannten Fläche ersetzen kann, deren Achsen die Richtung der positiven Normalen besitzen und deren Moment eine konstante Flächendichte Γ hat, die gleich der Zirkulation ist.

117. Wirbelschichten. Eine allgemeine Verteilung von Doppelquellen auf einer einfach zusammenhängenden Fläche, deren Achsen die Richtung der positiven Normalen besitzen und deren Moment eine von Ort zu Ort veränderliche Flächendichte μ hat, erregt ein Potential:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}do. \tag{105}$$

Eine solche Verteilung von Doppelquellen kann ersetzt werden durch eine Wirbelschicht, d. h. eine Verteilung von Wirbellinien, die auf der Fläche liegen.

Um das zu zeigen, setzt man das Potential in die Form[1]):

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int d\mu \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do. \tag{105'}$$

Das innere Integral führt man über eine Kalotte der Fläche bis zu einer geschlossenen Kurve, auf der die Dichte des Moments μ einen konstanten Wert besitzt. Dann kann

$$-\frac{d\mu}{4\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do$$

aufgefaßt werden als Potential einer Wirbellinie von der Zirkulation $d\Gamma = d\mu$, welche in die Grenzlinie der Kalotte fällt. Damit wird φ nach (105) das Potential einer Folge von Wirbellinien, welche auf der Fläche in die Kurven $\mu =$ const fallen und deren Zirkulation gleich dem Unterschied $d\mu$ des Parameters μ zweier benachbarter Kurven ist. —

Wenn eine Wirbelschicht eine mehrfach zusammenhängende Fläche, z. B. einen Torus bildet, so kann man jede einzelne Wirbellinie durch eine Doppelquellenschicht ersetzen, die in die Wirbellinie eingespannt wird. Die in die Wirbellinie eingespannte Fläche kann aber nicht so gewählt werden, daß sie auf dem Torus selbst liegt, sondern sie bildet einen Querschnitt, die den Innenraum (oder den Außenraum) des Torus in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt.

§ 8. Richtungsdifferentialquotienten höherer Ordnung.

118. Taylorsche Entwicklung einer Feldfunktion. Eine skalare oder auf eine feste Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezogene extensive Feldfunktion sei im Punkt P mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$ in der Form $F(x,y,z)$ gegeben. Sie läßt sich in einer gewissen Umgebung von P in einem Punkt Q mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{s} = (\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z) + (\mathfrak{i}h + \mathfrak{j}k + \mathfrak{k}l)$$

mittels der Taylorschen Reihe berechnen:

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k, z+l) = F(x,y,z) &+ \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)F \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} F \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(n)} F + \cdots \end{aligned} \tag{106}$$

1) Maxwell, Elektricity and Magnetism. § 652.

Jedes von Differentialquotienten gleich hoher Ordnung $n \geqq 1$ gebildete Polynom entsteht durch n-malige Anwendung des skalaren Operators $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}$, in dem man das skalare Produkt

$$\mathfrak{s} \cdot \nabla = (\mathfrak{i}h + \mathfrak{j}k + \mathfrak{k}l) \cdot \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

erkennt. Die Taylorsche Entwicklung lautet also in vektorieller Form (107 a)

$$F(\mathfrak{r} + \mathfrak{s}) = F(\mathfrak{r}) + \mathfrak{s} \cdot \nabla F + \frac{1}{2!}(\mathfrak{s} \cdot \nabla)^2 F + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathfrak{s} \cdot \nabla)^n F + \cdots$$

Setzt man

$$\mathfrak{s} = s\mathfrak{t}$$

als Produkt aus Betrag s und Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ an, so wird (107 b)

$$F(\mathfrak{r} + s\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{r}) + \frac{s}{1!}(\mathfrak{t} \cdot \nabla) F + \frac{s^2}{2!}(\mathfrak{t} \cdot \nabla)^2 F + \cdots + \frac{s^n}{n!}(\mathfrak{t} \cdot \nabla)^n F + \cdots$$

oder wenn man

$$\mathfrak{t} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial s}$$

als Operator einer Richtungsdifferentiation erkennt:

$$F(\mathfrak{r} + s\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{r}) + \frac{s}{1!}\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{s^2}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \cdots + \frac{s^n}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial s^n} + \cdots \qquad (107\,c)$$

Die Entwicklung (107 b) läßt sich noch umformen, wenn man mehrfach skalare Produktbildungen einführt (Ziff. 37); dann wird, weil $\mathfrak{t}$ ein konstanter Vektor ist:

$$(\mathfrak{t} \cdot \nabla)^2 = \mathfrak{t}\mathfrak{t} \cdot\cdot \nabla^2 = \mathfrak{t}^2 \cdot\cdot \nabla^2,$$
$$(\mathfrak{t} \cdot \nabla)^n = \mathfrak{t}^n \underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}_{(n)} \nabla^n,$$

wenn mit $\mathfrak{t}^n$ ein unbestimmtes Produkt von n Faktoren $\mathfrak{t}$ bezeichnet wird. Die Taylorsche Entwicklung nimmt dann folgende Form an:

$$F(\mathfrak{r} + \mathfrak{s}\mathfrak{t}) = F(\mathfrak{r}) + \frac{s}{1!}\mathfrak{t} \cdot \nabla F + \frac{s^2}{2!}\mathfrak{t}^2 \cdot\cdot \nabla^2 F + \frac{s^3}{3!}\mathfrak{t}^3 \cdot\cdot\cdot \nabla^3 F + \cdots$$
$$+ \frac{s^n}{n!}\mathfrak{t}^n \underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}_{(n)} \nabla^n F + \cdots \qquad (107\,d)$$

Diese Form läßt erkennen, daß das Polynom $n$ter Ordnung ($n \geqq 1$) bis auf den Faktor $\frac{s^n}{n!}$ ein Produkt zweier Tensoren $n$ter Stufe ist, deren Maßzahlen n-gliedrige Produkte des Richtungskosinus von $\mathfrak{t}$ bzw. Differentialquotienten $n$ter Ordnung von F sind. Der durch n-malige Richtungsdifferentiation der Funktion F nach einer festen Richtung $\mathfrak{t}$ entstehende Ausdruck hat folgenden Aufbau:

$$\frac{\partial^n F}{\partial s^n} = \mathfrak{t}^n \underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}_{(n)} \nabla^n F. \qquad (108)$$

119. Differentiation nach verschiedenen Richtungen. Die Differentiation der Funktion F nach zwei verschiedenen Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ ergibt:

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1 \cdot \nabla F; \quad \frac{\partial F}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2 \cdot \nabla F.$$

Führt man zwei Richtungsdifferentiationen nacheinander aus, so ergeben sich Ausdrücke folgender Form:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2\, \partial s_1} = (\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla)\, \mathfrak{t}_1 \cdot \nabla F; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s_1\, \partial s_2} = (\mathfrak{t}_1 \cdot \nabla)\, \mathfrak{t}_2 \cdot \nabla F; \tag{109}$$

dabei soll wie bisher vorausgesetzt werden, daß die beiden Vektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ konstante Vektoren sind, nicht von Ort zu Ort veränderliche Feldvektoren. Dann wird, wenn man etwa $\frac{\partial^2 F}{\partial s_2 \partial s_1}$ genauer berechnen will, der skalare Operator $\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla$ nur auf ∇F zur Anwendung zu bringen sein, weil $(\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla \mathfrak{t})_1 = 0$ ist. Mithin wird

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2\, \partial s_1} = \mathfrak{t}_1 \cdot (\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla) \nabla F = \mathfrak{t}_1 \cdot (\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla^2 F) = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \cdot\cdot \nabla^2 F,$$

ebenso

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1\, \partial s_2} = \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1 \cdot\cdot \nabla^2 F.$$

Wegen der Symmetrie von ∇^2 ist

$$\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \cdot\cdot \nabla^2 = \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1 \cdot\cdot \nabla^2 \tag{110}$$

oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_2\, \partial s_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial s_1\, \partial s_2}. \tag{111}$$

Die Reihenfolge der Richtungsdifferentiationen nach festen Richtungen ist also vertauschbar.

Für einen Richtungsdifferentialquotienten $n$ter Ordnung nach n verschiedenen festen Richtungen ergibt sich ebenso:

$$\frac{\partial^n F}{\partial s_n \cdots \partial s_2\, \partial s_1} = (\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \cdots \mathfrak{t}_n) \underset{(n)}{\underline{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}} \nabla^n F, \tag{112}$$

wobei die Reihenfolge ohne Einfluß ist. Der Operator einer Richtungsdifferentiation $n$ter Ordnung ist ein n-fach skalares Produkt zweier Tensoren $n$ter Stufe, deren erster das unbestimmte Produkt der Einheitsvektoren der n Differentiationsrichtungen und deren zweiter die $n$te Potenz des vektoriellen Operators ∇ ist.

120. Kugelfunktionen. Ein schönes Anwendungsgebiet für die Richtungsdifferentialquotienten höherer Ordnung ist die Theorie der Kugelfunktionen.

Eine homogene Funktion $n$ten Grades $U_n(x, y, z)$ oder $U_n(\mathfrak{r})$, die der Laplaceschen Gleichung:

$$\triangle U = 0 \tag{113}$$

genügt, heißt eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung. Dabei kann n positiv oder negativ sein.

Setzt man $\mathfrak{r} = r\mathfrak{e}$, so kann man die homogene Funktion $U_n(\mathfrak{r})$ in die Form:

$$U_n(\mathfrak{r}) = r^n S_n(\mathfrak{e}) \tag{114a}$$

bringen. $S_n(\mathfrak{e})$ ist homogen vom nullten Grad, hängt, in Koordinaten geschrieben, nur von den 3 Richtungscosinus von $\mathfrak{e}$ ab und heißt Kugelflächenfunktion $n$ter Ordnung.

Die Kugelflächenfunktionen negativer Ordnung unterscheiden sich nicht von denen positiver Ordnung, und zwar ist

$$S_{-n-1}(\mathfrak{e}) = S_n(\mathfrak{e}); \tag{114b}$$

es reduziert sich also die Untersuchung aller Kugelfunktionen auf die der Kugelflächenfunktionen positiver Ordnung; eine Kugelfunktion negativer Ordnung hat die Form:

$$U_{-n-1}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{r^{n+1}} S_n(\mathfrak{e}). \tag{114c}$$

Zum Beweis dieses Satzes transformiert man in der Regel die Laplacesche Gleichung (113) auf Kugelkoordinaten. Um einen kurzen Beweis mit den Methoden der Vektorrechnung zu erbringen, setzen wir die Laplacesche Gleichung für U_n an:

$$\triangle U_n = \triangle r^n S_n = 0$$

und erhalten zunächst nach Ziff. 81 (VII'):

$$(\triangle r^n) S_n + 2 \nabla r^n \cdot \nabla S_n + r^n \triangle S_n = 0. \tag{115}$$

Hier ist nach Ziff. 82 (23)

$$\nabla r^n = n r^{n-1} \nabla r = n r^{n-2} \mathfrak{r};$$

$$\triangle r^n = \nabla \cdot \nabla r^n = n(n-2) r^{n-3} \nabla r \cdot \mathfrak{r} + n r^{n-2} \nabla \cdot \mathfrak{r}$$

oder nach (24a), (26):

$$\triangle r^n = n(n+1) r^{n-2}.$$

Setzt man diese Werte in (115) ein, so verschwindet das mittlere Glied. Denn die Niveauflächen der nur von der Richtung des Ortsvektors abhängigen skalaren Feldfunktion S_n sind Kegel; ihr Gradient steht auf dem Ortsvektor senkrecht; also ist $\mathfrak{r} \cdot \nabla S_n = 0$. Bemerkt man noch, daß $\triangle S_n$ homogen vom Grad -2 ist, so erhält man nach Abspaltung des Faktors r^{n-2} die folgende Differentialgleichung für die Kugelflächenfunktion S_n:

$$n(n+1) S_n + r^2 \triangle S_n = 0. \tag{116}$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn man n durch $-n-1$ ersetzt. Damit ist der Beweis erbracht.

Für das folgende wird noch die Höchstzahl der willkürlichen Konstanten gebraucht, die eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung $U_n(\mathfrak{r})$ (für positives n) enthalten kann. Eine homogene ganze Funktion $n$ten Grades U_n in x, y, z enthält $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Konstante. Der Laplacesche Ausdruck $\triangle U_n$ ist vom $(n-2)$ten Grad und enthält $\frac{1}{2}(n-1)n$ Konstante, die, wenn $\triangle U_n$ verschwinden soll, ebensoviele Bedingungen für die Konstanten von U_n ergeben. Es bleiben also in U_n noch $(2n+1)$ Konstante frei; das ist die Höchstzahl der Konstanten einer Kugelfunktion $n$ter und ebenso $(-n-1)$ter Ordnung.

121. Der Maxwellsche Ansatz. Aus jedem Integral U der Laplaceschen Gleichung gewinnt man ein neues, indem man den noch mit einer willkürlichen Konstanten C multiplizierten Richtungsdifferentialquotient nach einer beliebigen Richtung bildet:

$$C\frac{\partial U}{\partial s} = C\mathfrak{t}\cdot\nabla U = h\frac{\partial U}{\partial x} + k\frac{\partial U}{\partial y} + l\frac{\partial U}{\partial z}.$$

In der Tat ist

$$\triangle\left(C\frac{\partial U}{\partial s}\right) = h\frac{\partial}{\partial x}\triangle U + k\frac{\partial}{\partial y}\triangle U + l\frac{\partial}{\partial z}\triangle U = C\frac{\partial}{\partial s}\triangle U = 0.$$

Geht man von dem Fundamentalintegral $\frac{1}{r}$ der Laplaceschen Gleichung aus, so erhält man durch n-fache Richtungsdifferentiation ein Integral, das von $(-n-1)$ter Ordnung homogen ist, also eine Kugelfunktion $(-n-1)$ter Ordnung:

$$U_{-n-1}(\mathfrak{r}) = C\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial s_n \cdots \partial s_2\, \partial s_1} = C(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\cdots\mathfrak{t}_n)\underset{(n)}{\cdots\cdots}\nabla^n\frac{1}{r}. \qquad (117\text{a})$$

Hieraus ergibt sich eine Kugelflächenfunktion $n$ter Ordnung nach (114c):

$$S_n(\mathfrak{e}) = C(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\cdots\mathfrak{t}_n)\underset{(n)}{\cdots\cdots}\left(\nabla^n\frac{1}{r}\right)r^{n+1} \qquad (117\text{b})$$

und eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung (für positives n) nach (114a):

$$U_n(\mathfrak{r}) = C(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\cdots\mathfrak{t}_n)\underset{(n)}{\cdots\cdots}\left(\nabla^n\frac{1}{r}\right)r^{2n+1}. \qquad (117\text{c})$$

Da jeder Einheitsvektor 2 wesentliche Konstante enthält, sind die gefundenen Funktionen von $(2n+1)$ willkürlichen Konstanten ab-

hängig. Damit sind die allgemeinen Kugelfunktionen gefunden[1]).

Jede Kugelfunktion und jede Kugelflächenfunktion ist ein n-fach skalares Produkt zweier Tensoren $n$ter Stufe. Der erste Faktor ist bis auf einen konstanten willkürlichen Faktor das unbestimmte Produkt von n willkürlichen Einheitsvektoren und gibt die n „Pole" der Kugelfunktion; der zweite Faktor ist eine Differentialinvariante des von den Ortsvektoren gebildeten Vektorfeldes bzw. des von ihren Einheitsvektoren gebildeten Bündels und hängt nur von der Ordnung der Kugelfunktion ab, nicht von ihrer speziellen Wahl.

Durch n-malige Differentiation nach der gleichen Richtung erhält man die einfachen (Legendreschen) Kugelfunktionen:

$$R_{-n-1}(\mathfrak{r}) = \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial s^n} = \underbrace{\mathfrak{t}^n \cdots\cdots}_{(n)} \nabla^n \frac{1}{r}. \tag{118a}$$

$$R_n(\mathfrak{r}) = r^{2n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial s^n} = \underbrace{\mathfrak{t}^n \cdots\cdots}_{(n)} \left(\nabla^n \frac{1}{r}\right) r^{2n+1}. \tag{118b}$$

Maxwell[2]) hat die Herleitung der Kugelfunktionen durch Richtungsdifferentiation angegeben und die Kugelfunktionen mechanisch gedeutet. Eine Kugelfunktion negativer Ordnung läßt sich auffassen als Potential eines im Anfangspunkt des Koordinatensystems liegenden Multipols, z. B. als Geschwindigkeitspotential einer vielfachen Quelle. Die Kugelfunktionen positiver Ordnung lassen dieselbe Deutung zu, wenn man den Pol im Unendlichen annimmt.

122. Aufstellung allgemeiner Kugelfunktionen. Um die allgemeinen Kugelflächenfunktionen (117b) und Kugelfunktionen für die niedrigsten Ordnungen schrittweise zu berechnen, braucht man im wesentlichen nur den Operator $\mathfrak{t} \cdot \nabla$ wiederholt auf Funktionen des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ zur Anwendung zu bringen. Dazu braucht man folgende Formeln (vgl. Ziff. 82):

$$\nabla \mathfrak{r} = I; \quad (\mathfrak{t} \cdot \nabla)\mathfrak{r} = \mathfrak{t};$$

$$\nabla r = \frac{\mathfrak{r}}{r} = \mathfrak{e}; \quad (\mathfrak{t} \cdot \nabla) r = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e}.$$

---

1) Einen exakten Beweis für die Allgemeinheit der gefundenen Kugelfunktionen gibt A. Ostrowski, Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen. Jahresber. deutsch. Math. Ver. Bd. **33**, 1924. Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik I. S. 423—430.

2) Maxwell, Elektricity and Magnetism Kap. IX.

Dann ergeben sich folgende allgemeine Kugelfunktionen negativer Ordnung:

$$U_{-1} = \frac{1}{r}; \tag{119}$$

$$U_{-2} = (\mathfrak{t}_1 \cdot \nabla)\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{e} = \frac{1}{r^2}[-\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{e}];$$

$$U_{-3} = (\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla)U_{-2} = -\frac{\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2}{r^3} + 3\frac{\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{r}\, \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{r}}{r^5} = \frac{1}{r^3}[-\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 + 3\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{e}\, \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{e}];$$

$$U_{-4} = (\mathfrak{t}_3 \cdot \nabla)U_{-3}$$

$$= \frac{1}{r^4}[3(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2\, \mathfrak{t}_3 \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_3\, \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{e} + \mathfrak{t}_3 \cdot \mathfrak{t}_1\, \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{e}) - 15\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{e}\, \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{e}\, \mathfrak{t}_3 \cdot \mathfrak{e}]$$

usw. Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke sind die Kugelflächenfunktionen $S_1(\mathfrak{e})$, $S_2(\mathfrak{e})$, $S_3(\mathfrak{e})$. Von der gewöhnlichen Darstellung unterscheidet sich die hier abgeleitete Form dadurch, daß die „Pole“ in Erscheinung treten.

Aus den allgemeinen (Laplaceschen) Kugelfunktionen kann man die einfachen (Legendreschen) Kugelfunktionen dadurch herleiten, daß man die sämtlichen Differentiationsrichtungen zusammenfallen läßt. Setzt man noch $\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e} = \cos\vartheta$, so erhält man folgende Kugelflächenfunktionen:

$$K_0(\mathfrak{e}) = 1; \tag{120}$$

$$K_1(\mathfrak{e}) = -(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e}) = -\cos\vartheta;$$

$$K_2(\mathfrak{e}) = -1 + 3(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e})^2 = -1 + 3\cos^2\vartheta;$$

$$K_3(\mathfrak{e}) = 9(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e}) - 15(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{e})^3 = 9\cos\vartheta - 15\cos^3\vartheta; \text{ usw.}$$

von ihnen unterscheiden sich die gebräuchlichen Legendreschen Polynome $P_0(\cos\vartheta)$, $P_1(\cos\vartheta)$, $P_2(\cos\vartheta)$, $P_3(\cos\vartheta)$ nur durch je einen Zahlenfaktor C, der so bestimmt wird, daß sämtliche Polynome für $\vartheta = 0$ den Wert 1 annehmen.

Die für alle Kugelfunktionen gleicher Ordnung charakteristischen Tensoren $\nabla^n \frac{1}{r}$ müssen sich nach (117a) aus den Formeln (119) für die Funktionen U_{-n-1} entnehmen lassen; aus U_{-2} und U_{-3} kann man ablesen:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{e}}{r^2}; \tag{121}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}[-I + 3\mathfrak{e}\mathfrak{e}];$$

aber bereits die Entnahme des Tensors $\nabla^3 \frac{1}{r}$ aus U_{-4} ist umständlich.

123. Differentiation in Richtung der Feldlinien eines Vektorfeldes. Bisher war stets vorausgesetzt, daß die Differentiationsrichtungen feste, im ganzen Raum gleiche Richtungen sind. Läßt man diese Voraussetzung fallen und definiert die Differentiationsrichtung in jedem Aufpunkt durch die Richtung $\mathfrak{t}$ der Feldlinien eines Vektorfeldes, so bleiben die bisherigen Formeln nur für die ersten Differentialquotienten, nicht aber für die höherer Ordnung in Gültigkeit.

Der erste Differentialquotient einer Feldfunktion f ist:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathfrak{t} \cdot \nabla f;$$

bei der Bildung des 2. Differentialquotienten in der gleichen Richtung ist zu bemerken, daß $\mathfrak{t}$ selbst eine Feldfunktion ist: also ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = (\mathfrak{t} \cdot \nabla)\mathfrak{t} \cdot \nabla f = (\mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t}) \cdot \nabla f + \mathfrak{t}^2 \cdot\cdot \nabla^2 f$$

oder:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial s} \cdot \nabla f + \mathfrak{t}^2 \cdot\cdot \nabla^2 f. \tag{122}$$

Differentiiert man nach zwei verschiedenen Richtungen, so werden die ersten Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \mathfrak{t}_1 \cdot \nabla f; \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = \mathfrak{t}_2 \cdot \nabla f;$$

und die gemischten zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} = (\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla)\mathfrak{t}_1 \cdot \nabla f = \frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} \cdot \nabla f + \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \cdot\cdot \nabla^2 f;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = (\mathfrak{t}_1 \cdot \nabla)\mathfrak{t}_2 \cdot \nabla f = \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} \cdot \nabla f + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1 \cdot\cdot \nabla^2 f.$$

Sie sind voneinander verschieden; wegen der Symmetrie von $\nabla^2 f$ wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1}\right) \cdot \nabla f. \tag{123}$$

In einem speziellen Fall, nämlich wenn sich die Feldlinien der beiden Vektorfelder mit den Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ zu Flächen anordnen lassen, und wenn überdies $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ aufeinander senkrecht stehen, führt (123) auf eine bekannte Formel zurück. Dann ist nämlich nach [Ziff. 59 (76)]

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = \boldsymbol{G}_1 \mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{G}_2 \mathfrak{t}_2,$$

mithin, wie bekannt [Ziff. 57 (70 b)]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = (\boldsymbol{G}_1 \mathfrak{t}_1 - \boldsymbol{G}_2 \mathfrak{t}_2) \cdot \nabla f = \boldsymbol{G}_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} - \boldsymbol{G}_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}. \tag{124}$$

Im allgemeinen aber, wenn die beiden Scharen von Feldlinien keine geschlossenen Vierecke bilden, kann man $\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1}$ linear durch drei nicht komplanare Feldvektoren darstellen, als deren zwei man $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ nehmen wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial s_1} = a_1 \mathfrak{t}_1 + a_2 \mathfrak{t}_2 + a_3 \mathfrak{t}_3;$$

a_1, a_2, a_3 sind dabei skalare Feldfunktionen. Dann wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = (a_1 \mathfrak{t}_1 + a_2 \mathfrak{t}_2 + a_3 \mathfrak{t}_3) \cdot \nabla f;$$

oder

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = a_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial s_3}. \tag{125}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle der Vertauschbarkeit der Reihenfolge gewöhnlicher Differentiationen, gibt also die Integrabilitätsbedingung simultaner Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung in Richtungsdifferentialquotienten.

124. Geometrie der Vektorfelder. Die folgenden Ziffern sind der Untersuchung geometrischer Eigenschaften der Vektorfelder und skalaren Felder gewidmet.

Ist der Einheitsvektor der Feldlinien eines Vektorfeldes $\mathfrak{t}$ als Feldfunktion gegeben, so kann man die für eine Kurve geltenden Frenetschen Formeln [Ziff. 42 (19)] so umschreiben, daß sie für die Kongruenz der Feldlinien gelten, wenn man die Differentiation nach der Bogenlänge durch eine Richtungsdifferentiation ersetzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t} &= \quad * \quad \boldsymbol{K}^0 \mathfrak{n} \quad * \quad ; \\ \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{n} &= -\boldsymbol{K}^0 \mathfrak{t} \quad * \quad + \boldsymbol{T}^0 \mathfrak{b}; \\ \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{b} &= \quad * \quad - \boldsymbol{T}^0 \mathfrak{n} \quad * \end{aligned} \tag{126}$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich unter Verwendung der aus Ziff. 80 (IV') folgenden Identität

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t} + \mathfrak{t} \times \operatorname{rot} \mathfrak{t}$$

umformen. In dieser Identität verschwindet, weil $\mathfrak{t}$ ein Einheitsvektor, also $\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t}$ konstant ist, die linke Seite; also wird

$$\mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t} = -\mathfrak{t} \times \operatorname{rot} \mathfrak{t}. \tag{127}$$

Damit wird die erste Frenetsche Formel (126)[1])

$$\mathfrak{t} \times \operatorname{rot} \mathfrak{t} + \boldsymbol{K}^0 \mathfrak{n} = 0. \tag{128}$$

---

1) R. Rothe, Anwendungen der Vektoranalysis auf Geometrie. Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver. 1912, XXI. S. 249—274.

Sie gibt die erste Krümmung $\boldsymbol{K}^0$ und die Hauptnormalenrichtung $\mathfrak{n}$ als Feldfunktionen und läßt erkennen, daß der Vektor rot $\mathfrak{t}$ der rektifizierenden Ebene angehört. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$ folgt aus (128) die Krümmung

$$\boldsymbol{K}^0 = \mathfrak{b} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{t} \tag{129}$$

als Maßzahl der Projektion des Vektors rot $\mathfrak{t}$ auf die Binormale.

$\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ können aus (126) mittels Richtungsdifferentialquotienten von $\mathfrak{t}$ berechnet werden; das soll nicht näher ausgeführt werden, dagegen seien unter Verwendung der aus den Frenetschen Formeln folgenden Formeln [Ziff. 43 (21 a, b)] Krümmung und Torsion der Feldlinien angegeben:

$$\boldsymbol{K}^0 = |\mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t}|$$

$$\boldsymbol{T}^0 = \frac{1}{|\mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t}|^2} [\mathfrak{t} \quad \mathfrak{t} \cdot \nabla \mathfrak{t} \quad (\mathfrak{t} \cdot \nabla)^2 \mathfrak{t}].$$

125. Flächennormale Felder. Sollen die Feldlinien eines Vektorfeldes Orthogonaltrajektorien einer Flächenschar $V = c$ sein, so muß der Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ dem Gradient des skalaren Feldes V parallel sein; also

$$\nabla V = q \mathfrak{t},$$

wo der skalare Faktor q als Betrag des Gradienten von V aufgefaßt werden kann.

Um die Feldfunktion V zu eliminieren, bildet man ihre Rotation, deren Verschwinden für einen Gradient charakteristisch ist:

$$\nabla \times \nabla V = \nabla q \times \mathfrak{t} + q \nabla \times \mathfrak{t} = 0.$$

Um auch q zu eliminieren, multipliziert man die erhaltene Gleichung skalar mit $\mathfrak{t}$; es ergibt sich

$$\mathfrak{t} \cdot \nabla \times \mathfrak{t} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{t} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{t} = 0 \tag{130}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer zu den Feldlinien orthogonalen Flächenschar.

Aus den Gleichungen (128) und (130) läßt sich jetzt der Vektor rot $\mathfrak{t}$ eindeutig berechnen; man bestätigt sofort die Richtigkeit der Lösung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{t} = \boldsymbol{K}^0 \mathfrak{b}. \tag{131}$$

Die Feldlinien des Vektors rot $\mathfrak{t}$ gehören den Orthogonalflächen des Vektors $\mathfrak{t}$ an; der Betrag von rot $\mathfrak{t}$ gibt die erste Krümmung der Feldlinien:

$$|\operatorname{rot} \mathfrak{t}| = \boldsymbol{K}^0. \tag{132}$$

126. Mittlere Krümmung der Orthogonalflächen. Wenn die Feldlinien des Vektors $\mathfrak{t}$ eine Schar von Orthogonalflächen $V=c$ besitzen, so existiert auf diesen ein System von zwei sich senkrecht schneidenden Kurvenscharen, deren Tangenten die Haupt- und Binormalen der Feldlinien sind. Für dieses System setzen wir die beiden ersten Gleichungen von (76 a, b) Ziff. 59 an:

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1} = G_1 \mathfrak{b} - N_1 \mathfrak{t}; \quad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial s_2} = G_2 \mathfrak{n} - N_2 \mathfrak{t}; \tag{133}$$

$\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$ tritt dabei an die Stelle von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{N}$; ds_1 und ds_2 sind die Linienelemente in Richtung der Haupt- und Binormalen. Dabei ist

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial s_1} = \mathfrak{n} \cdot \nabla \mathfrak{n} = -\mathfrak{n} \times \operatorname{rot} \mathfrak{n}; \quad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial s_2} = \mathfrak{b} \cdot \nabla \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \operatorname{rot} \mathfrak{b};$$

wenn man zur Umformung wie bei (127) die Identität (IV′) heranzieht. Aus (133) folgt jetzt

$$N_1 = [\mathfrak{t}\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{n}] = \mathfrak{b} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{n},$$
$$N_2 = [\mathfrak{t}\mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{b}] = -\mathfrak{n} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{b}.$$

Bezeichnet man mit H die mittlere Krümmung einer Orthogonalfläche, so wird

$$2H = N_1 + N_2 = \mathfrak{b} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{n} - \mathfrak{n} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{b}$$

oder nach Ziff. 80 (V′)

$$2H = \operatorname{div}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{b}),$$

also

$$2H = \operatorname{div} \mathfrak{t}. \tag{134}$$

Die Divergenz von $\mathfrak{t}$ ist gleich der doppelten mittleren Krümmung der Orthogonalflächen[1]).

Auf ein nicht so einfaches Ergebnis führt die in ähnlicher Weise mögliche Berechnung der Gaußschen Krümmung.

127. Äquidistanzflächen. Ausgehend von den Orthogonalflächen $V=c$ erhält man den Einheitsvektor der Feldlinien in der Form

$$\mathfrak{t} = \frac{\operatorname{grad} V}{|\operatorname{grad} V|} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|}.$$

Der Richtungsdifferentialquotient $\frac{\partial V}{\partial s}$ der Feldgröße V in Richtung der Feldlinien gibt den Betrag des Gradienten und soll mit q bezeichnet werden:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \mathfrak{t} \cdot \nabla V = |\nabla V| = q.$$

---

1) Der hier gegebene Beweis des bekannten Satzes folgt im wesentlichen dem Gedankengang von J. Spielrein. Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., S. 179.

q ist ein Maß für die Dichtigkeit der Niveauflächen $V = c$; es ist der reziproke Wert des Abstands zweier benachbarter Niveauflächen mit der Potentialdifferenz Eins. Auf jeder Fläche $q = c$ ist dieser Abstand eine konstante Größe. Die Flächen $q = c$ werden deshalb als Äquidistanzflächen bezeichnet. Sie sind in der Hydrodynamik, wenn V ein Geschwindigkeitspotential bedeutet, Flächen konstanten Betrags der Geschwindigkeit.

Wir bilden aus $\mathfrak{t} = \frac{\nabla V}{q}$ die Rotation nach Ziff. 80 (III′) unter Berücksichtigung von Ziff. 81 (IX):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{t} = \nabla \times \frac{\nabla V}{q} = \nabla \frac{1}{q} \times \nabla V = \frac{1}{q^2} \cdot \nabla V \times \nabla q. \qquad (135)$$

Anderseits ist nach (131)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{t} = \boldsymbol{K}^0 \mathfrak{b};$$

also

$$\boldsymbol{K}^0 \mathfrak{b} = \frac{1}{q^2} \nabla V \times \nabla q = \frac{1}{q} \mathfrak{t} \times \nabla q. \qquad (136)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Schnittlinien der Äquidistanzflächen mit den Niveauflächen, also die Äquidistanzkurven auf den Niveauflächen diejenigen Kurven sind, die die Binormalen der Feldlinien zu Tangenten haben[1]) (Fig. 62). Durch skalare Multiplikation von (136) mit $\mathfrak{b}$ erhält man

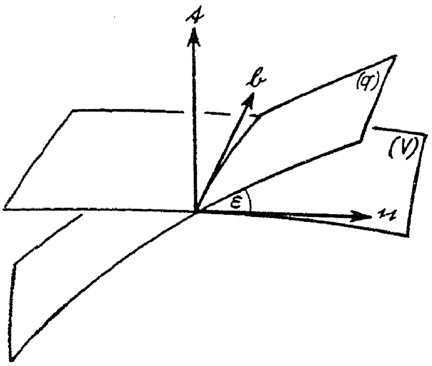


Fig. 62.

$$\boldsymbol{K}^0 = \frac{1}{q} [\mathfrak{b}\,\mathfrak{t} \nabla q] = \frac{1}{q} \mathfrak{n} \cdot \nabla q$$

oder

$$\boldsymbol{K}^0 = \frac{\partial \lg q}{\partial s_1}. \qquad (137)$$

Die Krümmung $\boldsymbol{K}^0$ der Feldlinien ist gleich dem Richtungsdifferentialquotient von $\lg q$ in Richtung der Hauptnormalen.

Auch der Ausdruck für die mittlere Krümmung läßt sich bei Einführung der Äquidistanzflächen umformen. Nach (134) ist

$$2\boldsymbol{H} = \operatorname{div} \mathfrak{t} = \nabla \cdot \frac{\nabla V}{q}$$

also nach (III)

$$2\boldsymbol{H} = \nabla \frac{1}{q} \cdot \nabla V + \frac{1}{q} \triangle V = \frac{1}{q}(-\mathfrak{t} \cdot \nabla q + \triangle V). \qquad (138)$$

1) M. Lagally, Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **63**, 1915, S. 360—380.

Eine besondere Vereinfachung tritt für Laplacesche Felder ein, für welche

$$\triangle V = 0$$

ist; dann wird

$$2\boldsymbol{H} = -\frac{1}{q}\mathfrak{t}\cdot\nabla q = -\frac{\partial \lg q}{\partial s}. \tag{139}$$

Die mittlere Krümmung der Niveauflächen ist also in diesem Fall durch den Richtungsdifferentialquotient von $\lg q$ in Richtung der Flächennormalen ausdrückbar.

Endlich sei noch der Vollständigkeit halber bemerkt, daß der Differentialquotient von $\lg q$ in Richtung der Binormalen in jedem flächennormalen Feld Null ist. Das folgt aus der Definition der Äquidistanzkurven. Durch skalare Multiplikation von (136) mit ∇q erhält man $\mathfrak{b}\cdot\nabla q = 0$ oder

$$\frac{\partial \lg q}{\partial s_2} = 0. \tag{140}$$

128. Laplacesche Felder. In einem Laplaceschen Feld läßt sich aus den beiden Gleichungen (136) und (139)

$$\mathfrak{t}\times\nabla\lg q = \boldsymbol{K}^0\mathfrak{b};$$
$$\mathfrak{t}\cdot\nabla\lg q = -2\boldsymbol{H}$$

der Vektor $\nabla\lg q$ (nach Ziff. 23, e) eindeutig berechnen. Man erhält

$$\nabla\lg q = -2\boldsymbol{H}\mathfrak{t} + \boldsymbol{K}^0\mathfrak{n}. \tag{141}$$

Dieser Vektor fällt in die Normale der Äquidistanzfläche. Um den Winkel ε, unter dem eine Niveaufläche von einer Äquidistanzfläche geschnitten wird, zu berechnen, dividiert man am besten die beiden Gleichungen (136) und (139) und zieht die geometrische Deutung des Vektorprodukts und skalaren Produkts heran; dann ist

$$\frac{\mathfrak{t}\times\nabla\lg q}{\mathfrak{t}\cdot\nabla\lg q} = \frac{\mathfrak{b}\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon};$$

also

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{\boldsymbol{K}^0}{2\boldsymbol{H}}. \tag{142}$$

Eine weitere interessante Beziehung erhält man, wenn man die Integrabilitätsbedingung der Gleichungen (137) und (139)

$$\boldsymbol{K}^0 = \mathfrak{n}\cdot\nabla\lg q;$$
$$-2\boldsymbol{H} = \mathfrak{t}\cdot\nabla\lg q$$

aufstellt. Zunächst ergeben sich durch nochmalige Richtungsdifferentiation

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla \boldsymbol{K}^0 = (\mathfrak{t}\cdot\nabla\mathfrak{n})\cdot\nabla \lg q + \mathfrak{n}\mathfrak{t}\cdot\cdot\nabla^2 \lg q,$$
$$-2\mathfrak{n}\cdot\nabla \boldsymbol{H} = (\mathfrak{n}\cdot\nabla\mathfrak{t})\cdot\nabla \lg q + \mathfrak{t}\mathfrak{n}\cdot\cdot\nabla^2 \lg q;$$

hieraus folgt nach Ziff. 123 die Integrabilitätsbedingung

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla \boldsymbol{K}^0 + 2\mathfrak{n}\cdot\nabla \boldsymbol{H} = (\mathfrak{t}\cdot\nabla\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\nabla\mathfrak{t})\cdot\nabla \lg q. \tag{143}$$

Um die rechte Seite zu berechnen, bemerkt man, daß nach den Frenetschen Formeln (126)

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla\mathfrak{n} = -\boldsymbol{K}^0\mathfrak{t} + \boldsymbol{T}^0\mathfrak{b}$$

ist. Ähnlich erhält man aus der dritten Gleichung (76a) von Ziff. 59 durch Änderung der Bezeichnung

$$\mathfrak{n}\cdot\nabla\mathfrak{t} = \boldsymbol{N}_1\mathfrak{n} - \boldsymbol{T}\mathfrak{b};$$

also

$$\mathfrak{t}\cdot\nabla\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\nabla\mathfrak{t} = -\boldsymbol{K}^0\mathfrak{t} - \boldsymbol{N}_1\mathfrak{n} + (\boldsymbol{T}^0 + \boldsymbol{T})\mathfrak{b}.$$

Damit wird (143) nach (141)

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}^0}{\partial s} + 2\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s_1} = 2\boldsymbol{K}^0\boldsymbol{H} - \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{K}^0;$$

bemerkt man, daß $2\boldsymbol{H} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2$ ist, so folgt die gesuchte Beziehung[1])

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}^0}{\partial s} + 2\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s_1} = \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{K}^0. \tag{144}$$

$\boldsymbol{N}_2$ ist die Normalkrümmung einer Niveaufläche in Richtung einer Äquidistanzkurve.

Weitere Eigenschaften der Laplaceschen Felder kommen Ziff. 132 u. 133 zur Sprache.

§ 9. Allgemeine Koordinaten im Raum.

129. Einführung von Parameterflächen. Um einen Punkt P einer Fläche festzulegen, bedient man sich (Ziff. 47) zweier Scharen von Gaußschen Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, die ein die Fläche überdeckendes Netz bilden. Der Punkt P ist dann durch die Parameterwerte u und v der durch ihn hindurchgehenden Parameterkurven bestimmt und in einem geeignet begrenzten Gebiet ist die Zuordnung eines Wertepaares u, v zu einem Punkt eineindeutig.

Diese Methode läßt sich verallgemeinern, um einen Punkt des Raumes festzulegen. Wählt man drei Scharen von Parameter-

1) J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., S. 184.

flächen $u(x, y, z) = \text{const}$, $v(x, y, z) = \text{const}$. $w(x, y, z) = \text{const}$, so besteht in einem geeignet begrenzten Gebiet eine eineindeutige Zuordnung eines Wertetripels x, y, z zu einem Wertetripel u, v, w. Ein Punkt P ist also durch seine allgemeinen Kordinaten u, v, w bestimmt, mithin auch sein Ortsvektor $\mathfrak{r}$ Auch eine skalare oder vektorielle Feldgröße kann von den allgemeinen Koordinaten des Aufpunkts P abhängig gemacht werden.

Die drei Scharen von Parameterflächen schneiden sich in drei Kurvenscharen. Längs der Schnittlinie einer Fläche $v = \text{const}$ mit einer Fläche $w = \text{const}$ ändert sich nur der Parameter u; man wird eine solche Kurve als u-Kurve bezeichnen und ebenso jede Kurve der anderen Scharen nach dem Parameter benennen, der sich längs derselben ändert.

130. Reziproke Systeme von Grundvektoren. Während bei Verwendung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eine gemeinsame Basis $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ für den ganzen Raum genügt, ist es bei Verwendung allgemeiner Koordinaten oft zweckmäßig, in jedem Aufpunkt P eine besondere, von u, v, w abhängige Basis zu definieren und die vektoriellen Feldgrößen in P auf sie zu beziehen. Für die Einführung einer von Ort zu Ort veränderlichen Basis gibt es zwei naheliegende Wege:

1. Man wählt als Grundvektoren drei Vektoren in Richtung der durch P gehenden u-, v-, w-Kurven; am einfachsten $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial w}$, abgekürzt geschrieben $\mathfrak{r}_u$, $\mathfrak{r}_v$, $\mathfrak{r}_w$.

2. Man wählt als Grundvektoren drei Vektoren, die auf den durch P gehenden Parameterflächen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ senkrecht stehen, am einfachsten $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} v$, $\operatorname{grad} w$, anders geschrieben ∇u, ∇v, ∇w.

Die beiden so gewählten Systeme von Grundvektoren sind zueinander reziprok [vgl. Ziff. 24]. Zum Beweise bemerkt man zunächst, daß jeder der Grundvektoren des einen Systems auf zwei Vektoren des andern senkrecht steht, z. B. ∇u auf $\mathfrak{r}_v$ und $\mathfrak{r}_w$; es ist also

$$\mathfrak{r}_v \cdot \nabla u = 0, \quad \mathfrak{r}_w \cdot \nabla u = 0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$\mathfrak{r}_u \cdot \nabla u = 1$$

ist. Schreitet man längs einer u-Kurve um ein Wegelement $d\mathfrak{r}$ fort, so ändert sich der Parameterwert u um

$$du = d\mathfrak{r} \cdot \nabla u = \mathfrak{r}_u du \cdot \nabla u.$$

Hieraus folgt die behauptete Gleichung.

Als Grundvektoren reziproker Systeme sind $\mathfrak{r}_u$, $\mathfrak{r}_v$, $\mathfrak{r}_w$ und ∇u, ∇v, ∇w mittels folgender Gleichungen durcheinander ausdrückbar:

$$\nabla u = \frac{\mathfrak{r}_v \times \mathfrak{r}_w}{[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]}, \quad \nabla v = \frac{\mathfrak{r}_w \times \mathfrak{r}_u}{[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]}, \quad \nabla w = \frac{\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v}{[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]}; \tag{145a}$$

$$\mathfrak{r}_u = \frac{\nabla v \times \nabla w}{[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w]}, \quad \mathfrak{r}_v = \frac{\nabla w \times \nabla u}{[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w]}, \quad \mathfrak{r}_w = \frac{\nabla u \times \nabla v}{[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w]}. \tag{145b}$$

Dabei ist

$$[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]\,[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w] = 1. \tag{146}$$

131. Berechnung von ∇ für eine veränderliche Basis. Zur Ausführung von Differentialoperationen ist es bei Verwendung allgemeiner Koordinaten u, v, w notwendig, ∇ durch diese Koordinaten und die zugehörigen Grundvektoren auszudrücken. Ist V eine skalare Feldgröße, so ist

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u}du + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{\partial V}{\partial w}dw.$$

Die rechte Seite kann als skalares Produkt zweier Vektoren geschrieben werden, von denen je einer auf eines der beiden reziproken Systeme bezogen ist:

$$dV = (\mathfrak{r}_u du + \mathfrak{r}_v dv + \mathfrak{r}_w dw)\cdot\left(\nabla u\frac{\partial V}{\partial u} + \nabla v\frac{\partial V}{\partial v} + \nabla w\frac{\partial V}{\partial w}\right).$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist die infinitesimale Änderung $d\mathfrak{r}$ des Ortsvektors, zu der die Änderung dV der Feldgröße V gehört und mit der sie durch die Gleichung (6)

$$dV = d\mathfrak{r}\cdot\nabla V$$

zusammenhängt. Durch Vergleich der beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$\nabla = \nabla u\frac{\partial}{\partial u} + \nabla v\frac{\partial}{\partial v} + \nabla w\frac{\partial}{\partial w}. \tag{147}$$

Bei Übergang zur reziproken Basis wird

$$\nabla = \frac{1}{[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]}\left\{\mathfrak{r}_v \times \mathfrak{r}_w\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{r}_w \times \mathfrak{r}_u\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v\frac{\partial}{\partial w}\right\}. \tag{148}$$

Mit Hilfe der gewonnenen Formeln kann man den Gradienten eines skalaren Feldes, Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes usw. für allgemeine Koordinaten berechnen, von denen Kugel- und Zylinderkoordinaten für die Praxis am wichtigsten sind. Diese Berechnungen sollen an dieser Stelle unterbleiben. Auf die invarianten Ausdrücke selbst wird später (Ziff. 226 und 254) von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus zurückzukommen sein.

132. Potentialflächen und Stromflächen. Um ein Beispiel für die Anwendung allgemeiner Koordinaten im Raum zu erhalten, betrachten wir die Niveauflächen $u(xyz) = \text{const}$ eines Laplaceschen Feldes und fassen die Feldlinien zu zwei weiteren Flächenscharen $v(xyz) = \text{const}$ und $w(xyz) = \text{const}$ zusammen. Diese Flächen sollen als Stromflächen bezeichnet werden; dabei liegt die Vorstellung zugrunde, daß u das Geschwindigkeitspotential der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist.

Da die Stromflächen auf den Niveauflächen senkrecht stehen, steht auch die Normale einer Niveaufläche senkrecht auf der Ebene, die von den Normalen zweier durch den Aufpunkt gehenden Stromflächen gebildet wird; also ist

$$\nabla u = \varrho \nabla v \times \nabla w, \tag{149}$$

wo ϱ von den Koordinaten u, v, w des Aufpunkts abhängt. Soll u der Laplaceschen Gleichung genügen, so muß

$$\triangle u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\varrho \nabla v \times \nabla w) = 0 \tag{150}$$

sein. Durch Ausrechnen des formalen Produktes erhält man nach Ziff. 80 (III):

$$\nabla \cdot (\varrho \nabla v \times \nabla w) = \nabla \varrho \cdot \nabla v \times \nabla w + \varrho \nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w);$$

dabei ist nach (V) und (IX)

$$\nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) = \nabla w \cdot \nabla \times \nabla v - \nabla v \cdot \nabla \times \nabla w = 0,$$

weil die Rotation eines Gradienten verschwindet. Also gibt (150) als Bedingung für ϱ

$$[\nabla \varrho \, \nabla v \, \nabla w] = 0.$$

Diese Bedingung ist, in Koordinaten geschrieben, das Verschwinden der Jakobischen Determinante von ϱ, v, w und sagt aus, daß ϱ eine Funktion von v und w allein, aber von u unabhängig ist. Also ist

$$\nabla u = \varrho(v, w) \nabla v \times \nabla w \tag{151}$$

die Bedingung dafür, daß v und w zwei Scharen von Stromflächen eines Laplaceschen Feldes mit den Niveauflächen u sind.

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen durch passende Wahl der Stromflächen. Man kann (151) in die Form:

$$\nabla u = \nabla v \times \nabla \int \varrho(v, w) \, dw$$

setzen; hält man also die eine Schar von Stromflächen v fest und ersetzt die andere Schar w durch die Schar $\int \varrho(v, w) dw = w'$, so ist

$$\nabla u = \nabla v \times \nabla w'$$

geworden. Auf der rechten Seite tritt neben dem Vektorprodukt zweier Gradienten kein skalarer Faktor mehr auf. Zwei solche Scharen von Stromflächen sollen als ein normiertes System bezeichnet werden. Bei Rückkehr zur alten Bezeichnung **gilt für ein normiertes System von Stromflächen eines Laplaceschen Feldes:**

$$\nabla u = \nabla v \times \nabla w. \tag{152}$$

Geht man zur reziproken Basis über, deren Grundvektoren in die Schnittlinien der Flächen u, v, w fallen, so folgt aus (152) nach (145a) und (145b):

$$\frac{\mathfrak{r}_v \times \mathfrak{r}_w}{[\mathfrak{r}_u\, \mathfrak{r}_v\, \mathfrak{r}_w]} = \mathfrak{r}_u\, [\nabla u\, \nabla v\, \nabla w]$$

oder nach (146):

$$\mathfrak{r}_u = \mathfrak{r}_v \times \mathfrak{r}_w. \tag{153}$$

Diese Gleichung ersetzt (152) vollständig und ist ebenso wie diese **für ein Laplacesches Feld bei Wahl normierter Stromflächen charakteristisch**[1]).

133. Zerlegung eines Strömungsfeldes in Zellen. Die drei Flächenscharen u, v, w teilen das ganze Strömungsfeld in Zellen von der Gestalt eines geraden Prismas mit parallelogrammartigem Querschnitt. Mit $ds = |\mathfrak{r}_u|\, du$ soll die Höhe eines solchen Prismas bezeichnet werden, mit $ds_1 = |\mathfrak{r}_v|\, dv$ und $ds_2 = |\mathfrak{r}_w|\, dw$ die andern Kanten; der Winkel der letztern sei α; der Querschnitt der Zelle dF.

Dann folgt aus (153), wenn man beiderseits den Betrag bildet:

$$\frac{ds}{du} = \frac{ds_1}{dv}\frac{ds_2}{dw} \sin\alpha = \frac{dF}{dv\, dw}$$

oder

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dv\, dw}{du}. \tag{154}$$

Greift man zur Herstellung der Zellenteilung aus den kontinuierlichen Scharen u, v, w diskrete Scharen heraus, welche festen Parameter-Differenzen du, dv, dw entsprechen, so ist die rechte Seite von (154) konstant. **In allen Zellen eines räumlichen Laplaceschen Strömungsfeldes ist** also der **Quotient aus Querschnitt und Höhe konstant.** Dieser Satz ist eine Erweiterung der Quadratteilung eines ebenen **Laplace**schen Feldes durch Potential- und Stromkurven.

---

1) M. Lagally, Systeme von Potentialflächen und Stromflächen. Ber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1914, S. 157—190.

Die Zellteilung besitzt auch hydrodynamische Wichtigkeit. Zunächst wird der Betrag q der Geschwindigkeit der Strömung durch den Betrag des Gradienten von u gegeben:

$$q = \frac{du}{ds};$$

dann folgt aus (154):

$$q\,dF = dv\,dw. \tag{155}$$

Der Fluß durch alle Röhren hat einen festen Wert; das ist der mechanische Sinn der normierten Systeme von Stromflächen.

Bildet man weiter die lebendige Kraft dT der in einer Zelle enthaltenen Flüssigkeit, so ist unter Voraussetzung der Dichte Eins der Flüssigkeit:

$$dT = \frac{1}{2}\,dF\,ds\,q^2 = \frac{1}{2}\,\frac{dv\,dw}{du}\,ds^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$

oder:

$$dT = \frac{1}{2}\,du\,dv\,dw. \tag{156}$$

Die Bewegungsenergie der Strömung hat in allen Zellen den gleichen Wert.

Kapitel 4. Dyaden.

§ 1. Elemente der Dyadenrechnung.

134. Lineare Vektorfunktion und affine Abbildung. Ein sehr einfaches und für die Anwendung wichtiges Vektorfeld entsteht dadurch, daß man dem Aufpunkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ einen Feldvektor

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{r} \cdot \Phi \tag{1}$$

zuordnet, wo Φ eine Dyade bedeutet. Zur Untersuchung der Eigenschaften dieses Feldes ist es zweckmäßig, $\mathfrak{v}$ als neuen Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ von einem Anfangspunkt aus aufzutragen. Die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi \tag{1'}$$

ist bereits (Ziff. 30) aufgetreten und als Ausdruck einer affinen Abbildung des Raumes $\mathfrak{r}$ auf den Raum $\mathfrak{r}'$ gedeutet worden. Die Transformationsformeln für die Koordinaten (Ziff. 27) sind homogene lineare Gleichungen; die vektorielle Feldfunktion $\mathfrak{r}'$ des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ ist eine lineare Vektorfunktion, das Feld $\mathfrak{v}$ ein lineares Vektorfeld.

Verwendet man für die Dyade Φ die dreigliedrige Form

$$\Phi = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3 , \tag{2}$$

so erkennt man, daß der Ortsvektor

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3)$$

die drei Werte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ annimmt, wenn $\mathfrak{r}$ mit den zu $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ reziproken Vektoren $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$, $\mathfrak{A}_3^*$ zusammenfällt (Ziff. 24). Damit ist die Aufgabe gelöst, diejenige lineare Vektorfunktion zu bestimmen, die drei nicht komplanaren Vektoren des Raumes $\mathfrak{r}$ drei nicht komplanare Vektoren des Raumes $\mathfrak{r}'$ zuordnet.

Man kann also — unter Abänderung der Bezeichnung — diejenige Dyade Φ, welche bei der affinen Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

den drei Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die drei Vektoren $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w} \cdot \Phi \tag{3}$$

zuordnet, sofort angeben. Sie ist

$$\Phi = \mathfrak{u}^*\mathfrak{u}' + \mathfrak{v}^*\mathfrak{v}' + \mathfrak{w}^*\mathfrak{w}', \tag{4}$$

wenn mit $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ die zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ reziproken Vektoren bezeichnet werden. [Vgl. Ziff. 26 (63 a).]

Ordnet man dem Aufpunkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ einen Feldvektor

$$\mathfrak{w} = \Psi \cdot \mathfrak{r} \tag{5}$$

zu, so entsteht ebenfalls ein lineares Vektorfeld, das bei geeigneter Wahl der Dyade Ψ — wie (Ziff. 137) gezeigt werden wird — von dem Feld (1) nicht verschieden ist. Trägt man $\mathfrak{w}$ als neuen Ortsvektor $\mathfrak{r}''$ auf, so ist die Gleichung

$$\mathfrak{r}'' = \Psi \cdot \mathfrak{r} \tag{5'}$$

wieder der Ausdruck einer affinen Abbildung.

Daß bei Verwendung reduzierbarer (planarer oder linearer) Dyaden die affine Abbildung ausartet, wurde (Ziff. 29) bereits erwähnt.

135. Produkt zweier Dyaden. Die Dyade in der neungliedrigen Form (Ziff. 32)

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ + a_{21}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ + a_{31}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}\end{aligned} \tag{6}$$

soll abgekürzt

$$\Phi = \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\mu$$

geschrieben werden, wobei wie früher (Ziff. 17) $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ für $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gesetzt sind und die Summation über beide Indizes zu erstrecken ist.

Es soll mit

$$\Psi = \sum b_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{i}_\varrho \mathfrak{i}_\sigma \tag{6'}$$

eine zweite Dyade bezeichnet und das skalare Produkt der beiden Dyaden (Ziff. 35) gebildet werden:

$$\Phi \cdot \Psi = \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\mu \cdot \sum b_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{i}_\varrho \mathfrak{i}_\sigma . \tag{7}$$

Von den 9^2 skalaren Produkten zweier dyadischer Produkte, die bei der Multiplikation auftreten, verschwinden nur die nicht, für die $\mu = \varrho$ ist. Also ist

$$\Phi \cdot \Psi = \sum a_{\lambda\mu} b_{\mu\sigma}\, \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\sigma .$$

Das skalare Produkt der beiden Dyaden ist eine neue Dyade X:

$$\Phi \cdot \Psi = X = \sum c_{\lambda\sigma}\, \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\sigma . \tag{8}$$

Die Determinante ihrer Maßzahlen

$$c_{\lambda\sigma} = \sum a_{\lambda\mu} b_{\mu\sigma} \tag{8'}$$

ist das Produkt der Determinanten der Maßzahlen $a_{\lambda\mu}$ von Φ und $b_{\varrho\sigma}$ von Ψ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Dabei sind die $c_{\lambda\sigma}$ in der Weise gebildet, daß die Zeilen der Determinante der $a_{\lambda\mu}$ mit den Spalten der Determinante der $b_{\varrho\sigma}$ komponiert sind. Ist eine der Dyaden Φ, Ψ die Dyade I, so gibt (8)

$$I \cdot \Psi = \Psi; \quad \Phi \cdot I = \Phi. \tag{10}$$

Wenn einer der Faktoren Φ, Ψ in (8) eine ausgeartete Dyade ist, verschwindet die Determinante ihrer Maßzahlen (Ziff. 27). Dann verschwindet auch die Produktdeterminante und X ist ebenfalls eine ausgeartete Dyade.

Für die Multiplikation der Dyaden gilt das assoziative Gesetz:

$$(\Phi \cdot \Psi) \cdot X = \Phi \cdot (\Psi \cdot X) = \Phi \cdot \Psi \cdot X. \tag{11}$$

Skalare Produkte von gleichen Dyaden werden als Potenzen geschrieben, z. B.:

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \Phi \cdot \Phi \\ \Phi^3 &= \Phi^2 \cdot \Phi = \Phi \cdot \Phi \cdot \Phi \end{aligned} \tag{12}$$

usw. für ganze positive Exponenten.

Für skalare Produkte aus Dyaden und Vektoren gilt das assoziative Gesetz in den Formen:

$$\begin{aligned} (\Phi \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{r} &= \Phi \cdot (\Psi \cdot \mathfrak{r}) = \Phi \cdot \Psi \cdot \mathfrak{r}, \\ (\mathfrak{r} \cdot \Phi) \cdot \mathfrak{s} &= \mathfrak{r} \cdot (\Phi \cdot \mathfrak{s}) = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{s}, \end{aligned} \tag{13}$$

die bereits (Ziff. 35, 37) bekannt sind.

136. Quotient zweier Dyaden. Als reziproke Dyade Φ^{-1} von Φ bezeichnet man die Dyade

$$\Phi^{-1} = \sum \bar{a}_{\varrho\sigma} \mathfrak{i}_\varrho \mathfrak{i}_\sigma, \tag{14}$$

die der Bedingung

$$\Phi \cdot \Phi^{-1} = I \tag{15}$$

genügt. Die Bestimmung der reziproken Dyade führt auf ein System von linearen Gleichungen:

$$\sum_\mu a_{\lambda\mu} \bar{a}_{\mu\sigma} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \sigma; \\ 1 \text{ für } \lambda = \sigma. \end{cases} \tag{16}$$

Dieses Gleichungssystem ist leicht aufzulösen, wenn man die Eigenschaften der Minoren einer Determinante heranzieht. Es sei

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

die Determinante der Maßzahlen der Dyade Φ; mit $A_{\mu\lambda}$ werde der Minor von $a_{\lambda\mu}$ bezeichnet, d. h. die zu dem Element $a_{\lambda\mu}$ gehörige Unterdeterminante von D, versehen mit dem Vorzeichen, mit welchen sie in der Entwicklung von D als Faktor von $a_{\lambda\mu}$ auftritt. Dann gelten folgende beiden Sätze:

a) Die Summe der Produkte der Elemente einer Reihe und der zugehörigen Minoren ist gleich der Determinante.

b) Die Summe der Produkte der Elemente einer Reihe und der Minoren der Elemente einer Parallelreihe ist Null.

Es gelten also die Gleichungen

$$\sum_{\mu} a_{\lambda\mu} A_{\mu\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \sigma; \\ D & \text{für } \lambda = \sigma. \end{cases}$$

Diese 9 Gleichungen gehen in das Gleichungssystem (16) über, wenn man

$$\frac{A_{\mu\sigma}}{D} = \bar{a}_{\mu\sigma}$$

setzt.

Man erkennt, daß jede Maßzahl $\bar{a}_{\varrho\sigma}$ der reduzierte, d. h. durch die Determinante selbst dividierte Minor von $a_{\sigma\varrho}$ in der Determinante der Maßzahlen der Dyade Φ ist. Die Auflösung wird unmöglich, wenn diese Determinante Null ist, also für ausgeartete Dyaden.

Eine Eigenschaft der reziproken Dyade ist, daß neben (15) auch die Gleichung

$$\Phi^{-1} . \Phi = I \tag{17}$$

besteht.

Schreibt man Potenzen von Φ^{-1} in der Gestalt

$$(\Phi^{-1})^n = \Phi^{-n},$$

so gilt die Gleichung

$$\Phi^m . \Phi^n = \Phi^{m+n} \tag{18}$$

für alle ganzen, positiven oder negativen Exponenten m und n; insbesondere ist

$$\Phi^0 = I. \tag{19}$$

Die Gleichungen (15), (17) definieren die Division durch eine Dyade für den speziellen Fall, daß der Dividend die Dyade I ist.

Allgemein ist die Aufgabe der Division durch eine Dyade die, aus einer Gleichung von der Form

$$\Phi \cdot \Psi = X \tag{20}$$

einen der Faktoren Φ oder Ψ zu bestimmen, wenn der andere und X gegeben sind. Nach (17) folgt unter Benutzung des assoziativen Gesetzes die Bestimmung des zweiten Faktors Ψ durch Multiplikation von (20) mit Φ^{-1} von links:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \cdot \Phi \cdot \Psi &= \Phi^{-1} \cdot X; \\ \Psi &= \Phi^{-1} \cdot X, \end{aligned} \tag{21a}$$

wenn der erste Faktor Φ eine nicht ausgeartete Dyade ist; ebenso die Bestimmung des ersten Faktors Φ durch Multiplikation von (20) mit Ψ^{-1} von rechts:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \Psi \cdot \Psi^{-1} &= X \cdot \Psi^{-1}; \\ \Phi &= X \cdot \Psi^{-1} \end{aligned} \tag{21b}$$

für nicht ausgeartete Dyaden Ψ.

Mit Benutzung des reziproken Wertes einer Dyade kann man eine nicht ausgeartete lineare Vektorfunktion (1′)

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

nach dem unabhängigen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ auflösen. Durch Multiplikation mit Φ^{-1} von rechts folgt

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1} = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \Phi^{-1}$$

oder

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}. \tag{22}$$

Ähnlich ergibt sich aus (5′)

$$\mathfrak{r}'' = \Psi \cdot \mathfrak{r}$$

der unabhängige Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \Psi^{-1} \cdot \mathfrak{r}''. \tag{23}$$

Diese Auflösung bedeutet geometrisch die Bestimmung der zu einer gegebenen affinen Transformation inversen (reziproken) Transformation.

137. Konjugierte Dyade. Vertauscht man in sämtlichen dyadischen Produkten einer Dyade Φ die beiden Faktoren, so geht Φ in die zu Φ konjugierte Dyade über, die durch Überstreichen von Φ, also mit $\bar{\Phi}$ bezeichnet wird (Ziff. 31).

Die konjugierte Dyade zu $\bar{\Phi}$ ist wieder Φ.

Ein Paar von konjugierten Dyaden ist z. B.:

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3; \\ \bar{\Phi} &= \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{A}_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Ein weiteres Paar ist:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\lambda\, \mathfrak{i}_\mu; \\ \overline{\Phi} &= \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\mu\, \mathfrak{i}_\lambda = \sum a_{\mu\lambda}\, \mathfrak{i}_\lambda\, \mathfrak{i}_\mu. \end{aligned} \tag{24'}$$

Es wurde bereits (Ziff. 31) erwähnt, daß für die skalare Multiplikation einer Dyade mit einem Vektor das kommutative Gesetz im allgemeinen nicht gilt. Es wird bei Benutzung der konjugierten Dyade durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi = \overline{\Phi} \cdot \mathfrak{r} \tag{25}$$

ersetzt. (Diese Gleichung zeigt die Gleichwertigkeit der Darstellungen (1) und (5) für ein lineares Vektorfeld.)

Das kommutative Gesetz gilt also nur für Dyaden, die mit ihrer konjugierten identisch, also durch die Gleichung:

$$\Phi = \overline{\Phi}$$

gekennzeichnet sind. Es sind das die (Ziff. 33) bereits erwähnten symmetrischen Dyaden, die bei Vertauschung der Faktoren der dyadischen Produkte ungeändert bleiben.

Als antisymmetrische Dyaden wurden (Ziff. 34) die Dyaden bezeichnet, die bei Vertauschung der Faktoren der dyadischen Produkte ihr Zeichen ändern, also durch

$$\Phi = -\overline{\Phi}$$

gekennzeichnet sind.

138. Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil. Jede Dyade läßt sich in eine Summe aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Dyade zerlegen. Diese Zerlegung einer Dyade Φ wird durch die identische Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}) + \frac{1}{2}(\Phi - \overline{\Phi}) \tag{26}$$

geleistet. Dabei ist

$$\Phi' = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}) \quad \text{der symmetrische,} \tag{27a}$$

$$\Phi'' = \frac{1}{2}(\Phi - \overline{\Phi}) \quad \text{der antisymmetrische Teil.} \tag{27b}$$

Zerlegt man somit die Dyade Φ in der Form

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' \tag{28a}$$

in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil, so ist die entsprechende Zerlegung der konjugierten Dyade Φ

$$\overline{\Phi} = \Phi' - \Phi''. \tag{28b}$$

Für die neungliedrige Form einer Dyade

$$\begin{aligned}\Phi = & a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{i}\mathfrak{k}\\ & + a_{21}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{j}\mathfrak{k}\\ & + a_{31}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Phi} = & a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{21}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{31}\mathfrak{i}\mathfrak{k}\\ & + a_{12}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{32}\mathfrak{j}\mathfrak{k}\\ & + a_{13}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{23}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}\end{aligned}$$

nehmen Φ' und Φ'' folgende Form an:

$$\begin{aligned}\Phi' = & a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}\\ & + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}) + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j})\\ & + \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})(\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}),\end{aligned} \quad (29\,\text{a})$$

$$\begin{aligned}\Phi'' = & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}) + \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32})(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j})\\ & + \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13})(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}).\end{aligned} \quad (29\,\text{b})$$

139. Einfachste Invarianten einer Dyade. Die Dyade ist eine vom Koordinatensystem unabhängige extensive Größe. Diese Eigenschaft wird vorausgesetzt, wenn man — wie das bereits wiederholt geschehen ist — die Dyade auf eine vorgegebene Basis bezieht oder so umformt, daß die linken Faktoren gegebene Vektoren sind.

Ersetzt man in allen dyadischen Produkten einer Dyade die unbestimmte Multiplikation der Vektoren durch die skalare oder vektorielle, so entstehen Größen, die ebenso wie die Dyade selbst vom Koordinatensystem unabhängig sind und infolgedessen als Invarianten bezeichnet werden müssen. Diese beiden Invarianten werden als erster Skalar Φ_{I} und Vektor $\Phi_{\times}$ der Dyade Φ bezeichnet.

Für die dreigliedrige Form

$$\Phi = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$$

ist

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\cdot\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\cdot\mathfrak{B}_3 \quad (30\,\text{a})$$

und

$$\Phi_{\times} = \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\times\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3\times\mathfrak{B}_3, \quad (30\,\text{b})$$

für die neungliedrige Form

$$\Phi = \sum a_{\lambda\mu}\mathfrak{i}_\lambda\mathfrak{i}_\mu$$

ist

$$\Phi_{\mathrm{I}} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (31\,\text{a})$$

und

$$\Phi_{\times} = (a_{23} - a_{32})\mathfrak{i} + (a_{31} - a_{13})\mathfrak{j} + (a_{12} - a_{21})\mathfrak{k}. \quad (31\,\text{b})$$

Als Beispiel seien die Invarianten der lokalen Dyade (Ziff. 77)

$$\Phi = \nabla \mathfrak{v}$$

angegeben:

$$\Phi_I = \nabla \cdot \mathfrak{v} = \operatorname{div} \mathfrak{v}, \tag{32a}$$

$$\Phi_\times = \nabla \times \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}, \tag{32b}$$

deren Invariantencharakter bereits bekannt ist. —

Der Wert des ersten Skalars einer Dyade hängt nur von ihrem symmetrischen Teil, der ihres Vektors nur von ihrem antisymmetrischen Teil ab. Um das einzusehen, bemerkt man zuerst, daß nach (31a) der erste Skalar einer antisymmetrischen Dyade Φ'' und nach (31b) der Vektor einer symmetrischen Dyade Φ' verschwinden:

$$\Phi''_I = 0, \tag{33a}$$

$$\Phi'_\times = 0. \tag{33b}$$

Ferner bemerkt man, daß der erste Skalar der Summe zweier Dyaden $(\Phi + \Psi)$ gleich der Summe der ersten Skalaren von Φ und Ψ ist, also:

$$(\Phi + \Psi)_I = \Phi_I + \Psi_I. \tag{34a}$$

Ebenso:

$$(\Phi + \Psi)_\times = \Phi_\times + \Psi_\times. \tag{34b}$$

Wendet man diese Sätze auf die in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegte Dyade

$$\Phi = \Phi' + \Phi''$$

an, so folgt:

$$\Phi_I = \Phi'_I; \tag{35a}$$

$$\Phi_\times = \Phi''_\times. \tag{35b}$$

Für die Invarianten der konjugierten Dyade:

$$\bar{\Phi} = \Phi' - \Phi''$$

erhält man:

$$\bar{\Phi}_I = \Phi'_I = \Phi_I; \tag{36a}$$

$$\bar{\Phi}_\times = -\Phi''_\times = -\Phi_\times. \tag{36b}$$

Für die Dyade Eins

$$I = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

sind der erste Skalar und der Vektor:

$$I_I = 3; \quad I_\times = 0. \tag{37}$$

140. Der Vektor $\Phi_\times$. Eine antisymmetrische Dyade Φ'' nimmt bei Zugrundelegung eines beliebigen Dreibeins $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Form

$$\Phi'' = l(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j}) + m(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}) + n(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}) \tag{38}$$

an. Dann wird:

$$\Phi_\times = 2[l\mathfrak{i} + m\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}]. \tag{39}$$

l, m, n hängen von der speziellen Wahl des Dreibeins ab. Man kann das Dreibein so wählen, daß der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ in die Richtung von $\Phi_\times$ fällt; dann sind $l = 0$, $m = 0$, also

$$\Phi'' = n(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}); \tag{40}$$

$$\Phi_\times = 2n\mathfrak{k}. \tag{41}$$

Damit ist gezeigt, daß man jede antisymmetrische Dyade in eine Normalform setzen kann, in der nur eine einzige Differenz zweier konjugierter dyadischer Produkte auftritt (deren Faktoren hier obendrein als zwei aufeinander senkrechte Vektoren gewählt sind). Der Vektor $\Phi_\times$ steht auf der durch die antisymmetrische Dyade Φ'' definierten Plangröße senkrecht; nach (40, 41) ist

$$\Phi'' \cdot \Phi_\times = 0. \tag{42}$$

Bildet man unter Verwendung der Normalform (40)

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi'' = n\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}),$$

so folgt bei Einführung eines dreifachen Vektorprodukts nach Ziff. 34 (99):

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi'' = n\mathfrak{r} \times (\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) = -n\mathfrak{r} \times \mathfrak{k}.$$

Somit wird nach (41)

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi'' = -\frac{1}{2}\mathfrak{r} \times \Phi_\times; \tag{43a}$$

ähnlich

$$\Phi'' \cdot \mathfrak{r} = -\frac{1}{2}\Phi_\times \times \mathfrak{r} = \frac{1}{2}\mathfrak{r} \times \Phi_\times. \tag{43b}$$

Diese Gleichungen gelten trotz der bei der Ableitung verwendeten speziellen Basis wegen der Invarianz der vorkommenden Größen allgemein. Sie ersetzen die vektorielle Multiplikation mit einem Vektor durch eine skalare Multiplikation mit einer antisymmetrischen Dyade. (Vgl. Ziff. 34.) Zugleich lassen sie erkennen, wie diese Dyade zu wählen ist, da die zu einem Vektor $\Phi_\times$ gehörige Dyade Φ'' nach (38) vollständig bestimmt ist.

141. Kinematische Deutung. Eine antisymmetrische Dyade Φ'' ordnet durch die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \Phi'' \cdot \mathfrak{r}$$

nach (43b) jedem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Raumes einen Vektor $\mathfrak{r}'$ der zu $\Phi_\times$ senkrechten Ebene zu, der zugleich auf dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ senkrecht steht.

Die Zuordnung zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ ist dieselbe, die durch eine Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ zwischen einem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Raumes und der Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ seines Endpunkts hergestellt wird. Setzt man nämlich in (43b)

$$-\frac{1}{2}\Phi_\times = \mathfrak{u}, \tag{44}$$

so folgt aus:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}$$

die behauptete Beziehung

$$\Phi'' \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{v}. \tag{45}$$

Es ist jetzt auch leicht, die antisymmetrische Dyade Φ'' aufzustellen, die die Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = \xi\mathfrak{i} + \eta\mathfrak{j} + \zeta\mathfrak{k} \tag{46}$$

ersetzt. Schreibt man nämlich die Gleichung (44) ausführlich:

$$-\frac{1}{2}\Phi_\times = \xi\mathfrak{i} + \eta\mathfrak{j} + \zeta\mathfrak{k},$$

so ist nach (38) und (39)

$$\Phi'' = -\xi(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j}) - \eta(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}) - \zeta(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}) \tag{47}$$

die gesuchte antisymmetrische Dyade.

§ 2. Reine Dehnung.

142. Tensorflächen zweiter Ordnung. Jeder Dyade (Tensor zweiter Stufe)

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ & + a_{21}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ & + a_{31}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}\end{aligned}$$

läßt sich durch zweimalige Multiplikation mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

eine skalare quadratische Form:

$$\begin{aligned}2F & = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} \\ & = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz \\ & \quad + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{23}yz \\ & \quad + a_{31}xz + a_{32}yz + a_{33}z^2\end{aligned} \tag{48}$$

zuordnen. Diese Zuordnung ist jedoch nicht eineindeutig, weil bei der Zusammenfassung der gemischtquadratischen Glieder, z. B. $(a_{12} + a_{21})xy$, je zwei Maßzahlen der Dyade nur als Summe verbunden vorkommen.

Zerlegt man die Dyade Φ in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$\Phi = \Phi' + \Phi'',$$

so wird

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \Phi' \cdot \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \cdot \Phi'' \cdot \mathfrak{r}.$$

Der zweite Summand verschwindet identisch, wie man aus der Umformung (43a)

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi'' \cdot \mathfrak{r} = -\frac{1}{2} \mathfrak{r} \cdot \Phi_\times \times \mathfrak{r} = 0$$

erkennt.

Also ist die quadratische Form $2F$ für alle Dyaden dieselbe, die denselben symmetrischen Teil besitzen. Die Zuordnung zwischen Dyade und Form wird eineindeutig, wenn man sich auf symmetrische Dyaden beschränkt, also $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ setzt. Diese Beschränkung wird bei der folgenden geometrischen Deutung vorausgesetzt, also unter Φ eine symmetrische Dyade verstanden.

Die Gleichung

$$2F = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} = \text{const}$$

oder

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = \text{const} \tag{49}$$

stellt eine Schar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, die Tensorflächen, dar.

Aus dem System der Tensorflächen wird häufig eine einzelne besonders normierte Fläche, in der Regel

$$2F = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} = 1 \tag{49'}$$

als Repräsentant der ganzen Schar herausgegriffen. Als Tensorflächen können ebensowohl ein- und zweischalige Hyperboloide wie Ellipsoide auftreten; für planare symmetrische Dyaden findet ein Ausarten in Zylinderflächen statt.

Bildet man den Gradient des Feldes, dessen Niveauflächen die Tensorflächen

$$2F = \text{const}$$

sind, und setzt

$$\mathfrak{r}' = \operatorname{grad} F, \tag{50}$$

so zeigt sich, daß $\mathfrak{r}'$ gerade die Vektorfunktion ist, die dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi \tag{51}$$

zugeordnet ist. Setzt man zum Beweis in (50)

$$\mathfrak{r}' = x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ y' &= \frac{\partial F}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ z' &= \frac{\partial F}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{52}$$

Dieselben Ausdrücke für x', y', z' erhält man aus der Gleichung (51) bei Ausführung der skalaren Multiplikation. [Vgl. Ziff. 32 (93) bei Voraussetzung einer symmetrischen Dyade.]

Der Vektor $\mathfrak{r}'$, der dem Ortsfektor $\mathfrak{r}$ durch die Vektorfunktion (51) $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$ zugeordnet ist, hat die Richtung der Normalen derjenigen Tensorfläche, die durch den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ geht. Sein Betrag ist für alle Punkte dieser Fläche dem Abstand von einer benachbarten umgekehrt proportional.

143. Reziproke Tensorflächen. Zufolge (51) ist

$$2F = \mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{r} = \text{const.} \tag{53}$$

Für alle Punkte einer Tensorfläche besitzt also das skalare Produkt aus dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und dem zugeordneten Vektor $\mathfrak{r}'$ einen konstanten Wert. Aus der Symmetrie von (53) in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ folgt, daß die Vektoren $\mathfrak{r}'$, die den Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ irgendeiner Fläche der Schar zugeordnet sind, ebenfalls eine Fläche zweiter Ordnung beschreiben, wenn man sie als Ortsvektoren aufträgt. In der Tat! Eliminiert man $\mathfrak{r}$ aus (53) mit Hilfe der aus (51) folgenden Gleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1},$$

so folgt

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{r}' = \text{const.} \tag{54}$$

Diese Gleichung gibt die Tensorflächen der reziproken Dyade Φ^{-1}, die reziproken Tensorflächen.

Die Beziehung zwischen den ursprünglichen und den reziproken Tensorflächen ist eine gegenseitige; d. h. letzteren sind als reziproke Tensorflächen wieder die ursprünglichen zugeordnet.

Zwischen einer Tensorfläche und der zugehörigen reziproken besteht eine wichtige geometrische Beziehung. Jeder der beiden Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ steht auf der Tangentialebene im Endpunkt des anderen senkrecht.

Setzt man die Gleichung der Tensorfläche und der reziproken Tensorfläche mit

$$\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}'\cdot\Phi^{-1}\cdot\mathfrak{r}'=1 \tag{55}$$

an, so ist

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'=1. \tag{55'}$$

Trägt man die Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ vom gleichen Anfangspunkt O aus auf (Fig. 63), so fallen die Lote p und p' von O auf die Tangentialebenen in die Richtung von $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$. Bezeichnet man deren Beträge mit r' und r, so wird nach (55')

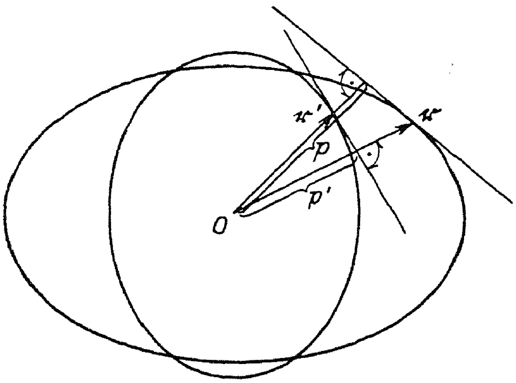


Fig. 63.

$$rp'=1; \quad r'p=1. \tag{56}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ersichtlich, daß die Punkte einer jeden der beiden Tensorflächen (55) und die Fußpunkte der Lote auf die Tangentialebenen der anderen invers bezüglich der Einheitskugel sind. Infolgedessen sind die Tangentialebenen jeder der beiden Flächen die Polarebenen der Punkte der anderen; *jede der beiden Tensorflächen* kann als Hüllfläche der Polarebenen der Punkte der anderen betrachtet werden, *ist also die Polarfläche der anderen* in bezug auf die Einheitskugel. Dagegen ist der geometrische Ort der Fußpunkte der Lote auf die Tangentialebenen einer Tensorfläche, *ihre Fußpunktfläche, die inverse Fläche zur reziproken Tensorfläche.*

Die Gleichung der Fußpunktfläche der Tensorfläche

$$\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=1$$

geht aus der Gleichung der reziproken Tensorfläche

$$\mathfrak{r}'\cdot\Phi^{-1}\cdot\mathfrak{r}'=1$$

dadurch hervor, daß man mittels der die Inversion vermittelnden Gleichung

$$\mathfrak{r}'=\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\bar{r}^2}; \quad \text{also} \quad r'\bar{r}=1 \tag{57}$$

die Ortsvektoren $\bar{\mathfrak{r}}$ der Fußpunkte der Lote einführt:

$$\bar{\mathfrak{r}}\cdot\Phi^{-1}\cdot\bar{\mathfrak{r}}=\bar{r}^4. \tag{58}$$

— Ähnliche Beziehungen gelten für zwei Tensorflächen

$$\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=C \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}'\cdot\Phi^{-1}\cdot\mathfrak{r}'=C$$

für beliebige Konstante C hinsichtlich einer Kugel vom Radius $\sqrt{|C|}$.

144. Tangentialebene und Normale der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Die Gleichung jeder Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung kann in der Form

$$\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=1$$

geschrieben werden, wo Φ eine symmetrische Dyade ist. Schreitet man von einem Punkt $\mathfrak{r}$ der Fläche zu einem Nachbarpunkt der Fläche um $d\mathfrak{r}$ fort, so gilt die Gleichung

$$d\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}+\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot d\mathfrak{r}=0$$

oder wegen der Symmetrie von Φ

$$d\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=0. \tag{59}$$

Hieraus erhält man die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{r}$, wenn man $d\mathfrak{r}$ durch einen endlichen Vektor $\mathfrak{s}-\mathfrak{r}$ ersetzt, wo $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor eines Punktes der Tangentialebene ist:

$$(\mathfrak{s}-\mathfrak{r})\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=0$$

oder

$$\mathfrak{s}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}=1. \tag{59'}$$

In (59) hat der Vektor $\Phi\cdot\mathfrak{r}$ die Richtung der Normalen der Fläche, weil er auf sämtlichen Fortschreitungen $d\mathfrak{r}$ senkrecht steht, die in der Fläche von einem Punkt ausgehen. Es ist also der Einheitsvektor $\mathfrak{N}$ der Normalen

$$\mathfrak{N}=\varrho\Phi\cdot\mathfrak{r}, \tag{60}$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist. Um diesen zu bestimmen, multipliziert man (60) skalar mit $\mathfrak{r}$; es ergibt sich

$$\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{r}=\varrho\,\mathfrak{r}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{r}$$

oder

$$\varrho=\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{r}=p.$$

Hier ist p der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt. Folglich ist der Einheitsvektor der Normalen

$$\mathfrak{N}=p\Phi\cdot\mathfrak{r}. \tag{60'}$$

145. Die reine Dehnung. Nimmt man die Hauptachsen der Tensorflächen zu Achsen des Koordinatensystems, so vereinfacht sich ihre Gleichung zu

$$2F=ax^2+by^2+cz^2=\text{const.} \tag{61}$$

Die Dyade selbst wird dann

$$\Phi=a\mathfrak{i}\mathfrak{i}+b\mathfrak{j}\mathfrak{j}+c\mathfrak{k}\mathfrak{k}. \tag{61'}$$

Diese Form wird als Normalform der symmetrischen Dyade bezeichnet. Sie läßt sich als Produkt dreier symmetrischer Dyaden von spezielllerem Charakter in folgender Form schreiben:

$$\Phi = (a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k});$$

dabei kann die Reihenfolge der Faktoren noch vertauscht werden.

Jeder dieser Faktoren ist eine Dyade, die eine ganz spezielle Affinität, nämlich eine einfache Dehnung in Richtung einer der 3 Achsen vermittelt; so ist die durch die erste Dyade

$$\Phi_1 = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

vermittelte Abbildung

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} \cdot \Phi_1$$

durch die Gleichungen

$$x_1 = ax, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

gegeben; Φ_1 vermittelt eine einfache Dehnung in Richtung der x-Achse. Der Maßstab der Dehnung ist a; er kann positiv oder negativ sein; im letzteren Fall ist die Dehnung mit einer Spiegelung an der yz-Ebene verbunden. Das Wort Dehnung ist also in einem etwas allgemeineren Sinn verwendet, als dem gewöhnlichen Gebrauch entspricht, der den Maßstab der Dehnung positiv voraussetzt.

Die durch die allgemeine symmetrische Dyade Φ (61′) vermittelte Affinität

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

setzt sich aus drei einfachen Dehnungen in drei zueinander senkrechten Richtungen zusammen, deren Reihenfolge ohne Einfluß auf das Ergebnis der Abbildung ist; in Koordinaten läßt sich diese Abbildung durch die 3 Gleichungen

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz$$

geben. Auch eine derartige zusammengesetzte Dehnung wird noch als reine Dehnung bezeichnet ebenso wie jede der einfachen Dehnungen, aus dem sie zusammengesetzt ist und die ihre Hauptdehnungen heißen.

Die inverse Abbildung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}$$

oder

$$x = \frac{x'}{a}; \quad y = \frac{y'}{b}; \quad z = \frac{z'}{c}$$

wird durch die Dyade

$$\Phi^{-1} = \frac{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}{a} + \frac{\mathfrak{j}\mathfrak{j}}{b} + \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{k}}{c} \qquad (62)$$

vermittelt. Die Gleichung der zugehörigen reziproken Tensorflächen ist

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{r}' = \frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} + \frac{z'^2}{c} = \text{const.} \tag{62'}$$

146. Das Maßellipsoid. Die Einheitskugel

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = 1$$

wird durch die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1},$$

wo Φ wieder eine symmetrische Dyade bedeutet, in ein Ellipsoid

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1} \cdot (\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}) = 1$$

oder

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-2} \cdot \mathfrak{r}' = 1 \tag{63a}$$

übergeführt. Nimmt man die Dyade Φ in der Normalform (61′)

$$\Phi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

an, so wird die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Das Ellipsoid geht aus der Einheitskugel durch eine reine Dehnung hervor, deren Hauptdehnungen die Maßstäbe a, b, c besitzen. Aus seinen Halbachsen a, b, c kann das Ellipsoid und seine punktweise Zuordnung zur Einheitskugel durch eine Konstruktion erhalten werden, die eine räumliche Verallgemeinerung der bekannten Konstruktion der Ellipse mittels der Kreise über den Achsen als Durchmesser ist. Die den Radien $\mathfrak{r}$ der Einheitskugel zugeordneten Ortsvektoren $\mathfrak{r}'$ des Ellipsoids können als Maßstäbe der Abbildungen beliebiger Vektoren $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ betrachtet werden. Deswegen soll das Ellipsoid (63a) als Maßellipsoid der Dehnung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

bezeichnet werden.

Die inverse Dehnung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}$$

führt die Einheitskugel

$$\mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{r}' = 1$$

in das reziproke Maßellipsoid

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi^2 \cdot \mathfrak{r} = 1 \tag{63b}$$

oder

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

über.

Das reziproke Maßellipsoid (63b) kann als eine zur Dyade Φ^2 gehörige Tensorfläche aufgefaßt werden und das Maßellipsoid

(63a) als zugehörige reziproke Tensorfläche. Infolgedessen besteht zwischen dem Paar von Maßellipsoiden die geometrische Beziehung, die für Paare von Tensorflächen charakteristisch ist.

147. Eine Beziehung zwischen Einheitskugel und Maßellipsoid. Einem Punkt $\mathfrak{r}_1$ der Einheitskugel ist auf dem Maßellipsoid ein Punkt

$$\mathfrak{r}_1' = \mathfrak{r}_1 \cdot \Phi$$

zugeordnet. Der Einheitsvektor der Normalen des Maßellipsoids im Punkt $\mathfrak{r}_1'$ ist nach (60′)

$$\mathfrak{N}_1 = p_1 \Phi^{-2} \cdot \mathfrak{r}_1'.$$

p_1 bedeutet den Abstand der Tangentialebene des Maßellipsoids im Punkt $\mathfrak{r}_1'$ vom Mittelpunkt.

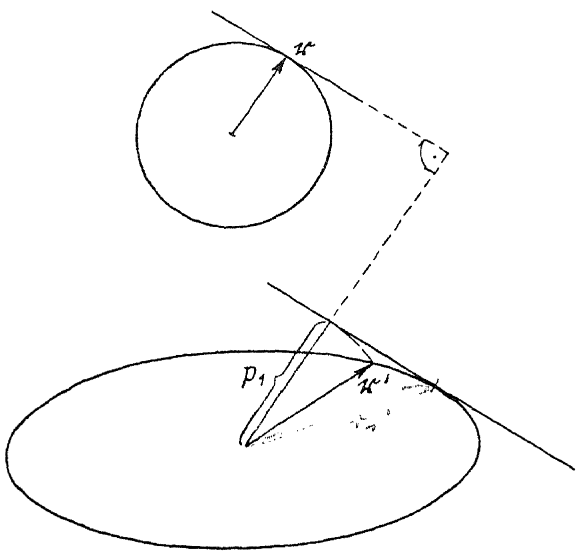


Fig. 64.

Nun wird ein zweiter Punkt der Einheitskugel ins Auge gefaßt, dessen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ der Normalen $\mathfrak{N}_1$ parallel ist (Fig. 64):

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{N}_1 .$$

Der Ortsvektor des zugehörigen Punktes $\mathfrak{r}'$ des Maßellipsoids ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{N}_1 \cdot \Phi = p_1 \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{r}_1'$$

oder

$$\mathfrak{r}' = p_1 \mathfrak{r}_1 .$$

Also ist $\mathfrak{r}'$ dem ersten Ortsvektor parallel und sein Betrag ist

$$r' = p_1 . \tag{64}$$

Somit ordnet die Dyade Φ jedem Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ einen Vektor $\mathfrak{r}'$ zu, dessen Betrag gleich dem Mittelpunktsabstand derjenigen Tangentialebene des Maßellipsoids ist, die auf $\mathfrak{r}$ senkrecht steht.

§ 3. Drehung des Raumes.

148. Der Versor als Operator der Drehung. Durch eine lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}, \tag{65}$$

wo Φ jetzt eine beliebige vollständige, nicht notwendig symmetrische Dyade bezeichnet, wird die Einheitskugel

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = 1$$

ebenfalls in ein Ellipsoid, das Maßellipsoid der durch Φ vermittelten Affinität, übergeführt, dessen Gleichung zunächst in der Form

$$(\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}) \cdot (\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1}) = 1 \tag{66}$$

erscheint.

Die linke Seite dieser Gleichung ist bei Einführung von Koordinaten sicher eine homogene quadratische Form zweiten Grades. Da die Vektorfunktion (65) jedem endlichen $\mathfrak{r}$ ein endliches $\mathfrak{r}'$ zuordnet, kann die durch (66) dargestellte Fläche nur ein Ellipsoid sein.

Zur Umformung der Gleichung (66) sind einige Überlegungen über das Rechnen mit konjugierten Dyaden notwendig.

Sind Φ und Ψ zwei vollständige Dyaden, so berechnet sich die konjugierte ihres Produkts $\Pi = \Phi \cdot \Psi$ nach der Formel:

$$\overline{\Pi} = \overline{\Psi} \cdot \overline{\Phi}.$$

Denn die beiden Dyaden $\Phi \cdot \Psi$ und $\overline{\Psi} \cdot \overline{\Phi}$ unterscheiden sich (nach Ausführung der skalaren Multiplikation) nur durch die Reihenfolge der Faktoren in den dyadischen Produkten; sie sind also konjugiert.

Speziell ist hiernach

$$\overline{\Phi} \cdot \overline{\Phi^{-1}} = I,$$

also ist nach der Definition der reziproken Dyade (15)

$$\overline{\Phi^{-1}} = (\overline{\Phi})^{-1}, \tag{67}$$

wofür man unter Weglassung der Klammer $\overline{\Phi}^{-1}$ setzen kann.

Jetzt kann (66) unter Anwendung des assoziativen Gesetzes in die Form

$$\mathfrak{r}' \cdot \Phi^{-1} \cdot \overline{\Phi}^{-1} \cdot \mathfrak{r}' = 1 \tag{68}$$

oder

$$\mathfrak{r}' \cdot X \cdot \mathfrak{r}' = 1$$

gesetzt werden, wenn zur Abkürzung für $\Phi^{-1} \cdot \overline{\Phi}^{-1} = X$ geschrieben wird.

Die lineare Vektorfunktion (65) führt jedes Dreibein von aufeinander senkrechten Halbmessern der Kugel in ein Tripel konjugierter Halbmesser des Maßellipsoids über. Als charakterisierende Eigenschaft eines Tripels konjugierter Halbmesser ist dabei die

aufzufassen, daß die Tangentialebene im Endpunkt eines jeden von ihnen der Ebene der beiden anderen parallel ist. Diese Eigenschaft bleibt bei jeder affinen Abbildung erhalten.

Die Achsen des Ellipsoids können ebenfalls nur aus drei zueinander senkrechten Durchmessern der Kugel hervorgegangen sein. Es gibt also bei jeder Abbildung durch eine lineare Vektorfunktion drei zueinander senkrechte Richtungen, die in drei zueinander senkrechte Richtungen übergehen.

Daraus ergibt sich, daß jede vollständige Dyade in die Normalform:

$$\Phi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + b\mathfrak{j}\mathfrak{j}' + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}' \tag{69}$$

gesetzt werden kann, wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ zwei Dreibeine und a, b, c reelle Konstante sind. Die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

läßt den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die zueinander senkrechten Vektoren $a\mathfrak{i}'$, $b\mathfrak{j}'$, $c\mathfrak{k}'$ entsprechen.

Die Normalform (69) kann in zweierlei Weise zerspalten werden:

$$\begin{aligned} \Phi &= (a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'), \\ \Phi &= (\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}') \cdot (a\mathfrak{i}'\mathfrak{i}' + b\mathfrak{j}'\mathfrak{j}' + c\mathfrak{k}'\mathfrak{k}'). \end{aligned} \tag{70}$$

Die Dyade

$$\Omega = \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}' \tag{71}$$

vermittelt eine reine Drehung. Durch die lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}')$ wird das Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in das Dreibein $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ übergeführt. Der andere Faktor von Φ in (70) vermittelt eine reine Dehnung, die vor oder nach der Drehung in Richtung derjenigen Achsen ausgeführt wird, deren Orthogonalität durch die affine Abbildung nicht zerstört wird. Die affine Abbildung ist damit in die Aufeinanderfolge einer reinen Dehnung und einer reinen Drehung zerlegt.

Jede Dyade, welche eine reine Drehung vermittelt, heißt Versor. Die in (71) angeschriebene Form der Dyade Ω wird als Normalform des Versors bezeichnet.

Jeder Versor Ω vermittelt zwei verschiedene Drehungen durch die linearen Vektorfunktionen

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Omega$$

und

$$\mathfrak{r}'' = \Omega \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \overline{\Omega}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß

$$\Omega \cdot \overline{\Omega} = I \quad \text{oder} \quad \overline{\Omega} = \Omega^{-1} \tag{72}$$

ist, daß also die zweite Drehung die erste rückgängig macht.

149. Aufstellung eines Versors. Um den Versor Ω vollständig aufzustellen, der das Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in das Dreibein $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ überführt, hat man in (71) $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ mittels der 9 Richtungskosinus oder unter Einführung der Eulerschen Winkel (Ziff. 11) durch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ auszudrücken.

Für die Anwendungen wichtiger ist die Aufstellung eines Versors, der zu einer Drehung mit vorgegebener Drehachse und vorgegebenem Drehwinkel q gehört. Die Drehachse sei zunächst die z-Achse des Koordinatensystems. Dann wird das Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in ein Dreibein $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ übergeführt, das durch die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}' &= \mathfrak{i} \cos q + \mathfrak{j} \sin q; \\ \mathfrak{j}' &= -\mathfrak{i} \sin q + \mathfrak{j} \cos q; \\ \mathfrak{k}' &= \mathfrak{k} \end{aligned} \tag{73}$$

bestimmt ist.

Schreibt man die lineare Vektorfunktion, welche die Drehung vermittelt, in der Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Omega, \tag{74}$$

in der der Versor Ω als zweiter Faktor auftritt, so wird:

$$\Omega = \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$

nach (73)

$$\Omega = (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}) \cos q + (\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}) \sin q + \mathfrak{k}\mathfrak{k}. \tag{75}$$

In dieser Formel ist $\mathfrak{k}$ der Einheitsvektor der Drehachse, während $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ bis zu einem gewissen Grad willkürlich sind. Durch eine einfache Umformung kann man $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ eliminieren. Führt man die Dyade I in der Form

$$I = \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

ein und bemerkt, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} \times I &= \mathfrak{k} \times (\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \\ &= \mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j} \end{aligned}$$

ist, so nimmt der Versor die Form

$$\Omega = (I - \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \cos q - (\mathfrak{k} \times I) \sin q + \mathfrak{k}\mathfrak{k} \tag{76}$$

an.

Der Versor Ω ist jetzt eindeutig bestimmt durch den Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ der Drehachse und den Drehwinkel q, der positiv oder negativ sein kann. Der Einheitsvektor $\mathfrak{k}$, in dessen Richtung zunächst die z-Achse des Koordinatensystems gelegt war, ist ein beliebiger Einheitsvektor des

Raumes; die Beziehung zu einem Koordinatensystem ist in (76) verschwunden.

Der Ortsvektor $\mathfrak{r}'$, der durch die Drehung aus einem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ hervorgeht, wird dann, ausführlich geschrieben:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot[(I - \mathfrak{k}\mathfrak{k})\cos q - (\mathfrak{k}\times I)\sin q + \mathfrak{k}\mathfrak{k}]. \tag{77}$$

Hierfür kann man eine geometrische Deutung angeben. Führt man nämlich die skalare Multiplikation aus, so zerfällt $\mathfrak{r}'$ in drei Komponenten:

$$\mathfrak{r}\cdot(I - \mathfrak{k}\mathfrak{k})\cos q = (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k})\cos q,$$
$$-\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\times I\sin q = -\mathfrak{r}\times\mathfrak{k}\cdot I\sin q = \mathfrak{k}\times\mathfrak{r}\sin q,$$
$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k}.$$

Die Komponente $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k}$ fällt in die Drehachse, ihr Betrag ist gleich der Projektion von $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{k}$ (Fig. 65).

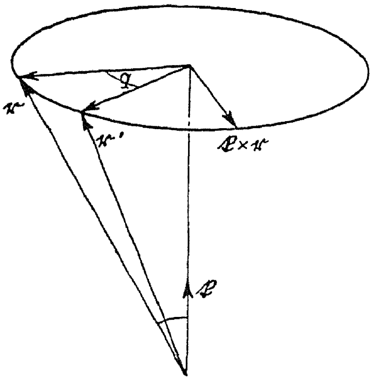


Fig. 65.

Der Vektor $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k}$ liegt in der Ebene $(\mathfrak{r}, \mathfrak{k})$ und steht senkrecht auf $\mathfrak{k}$. Der Vektor $\mathfrak{k}\times\mathfrak{r}$ steht auf beiden senkrecht.

Die beiden letzten Vektoren haben denselben Betrag $r\sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{k})$; das ist der Radius des Kreises, den die Spitze des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ bei der Drehung beschreibt. Die Komponenten $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k})\cos q$ und $\mathfrak{k}\times\mathfrak{r}\sin q$ geben also die Zerlegung derjenigen Komponente von $\mathfrak{r}'$, die in die Ebene des Kreises fällt, während die in die Achse fallende Komponente von $\mathfrak{r}'$ dieselbe ist wie die Komponente $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k}\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{r}$.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Drehung um $q = \pi$, die Umklappung. Die Dyade Ψ, die die Umklappung vermittelt, geht durch Spezialisierung aus (76) hervor:

$$\Psi = 2\mathfrak{k}\mathfrak{k} - I. \tag{78}$$

Sie ist nicht nur mit ihrer konjugierten Dyade $\overline{\Psi}$, sondern auch mit ihrer reziproken Ψ^{-1} identisch. Infolgedessen sind die beiden Vektorfunktionen $\mathfrak{r}\cdot\Psi$ und $\Psi\cdot\mathfrak{r}$ identisch. Die Umklappung ist eine involutorische Transformation.

150. Zusammensetzung zweier Umklappungen. Zwei Umklappungen um zwei sich schneidende Achsen mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ werden durch die Dyaden:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 2\mathfrak{a}\mathfrak{a} - I; \\ \Psi_2 &= 2\mathfrak{b}\mathfrak{b} - I \end{aligned} \tag{79}$$

vermittelt.

Klappt man zuerst um $\mathfrak{a}$, dann um $\mathfrak{b}$ um, so resultiert eine Drehung um eine Achse, die auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht steht. Die Richtung der Drehung ist dieselbe wie die der Drehung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$; der Drehwinkel q ist doppelt so groß wie der Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, der also mit $\frac{q}{2}$ zu bezeichnen ist.

Die lineare Vektorfunktion, die die aus den beiden Umklappungen zusammengesetzte Drehung vermittelt, ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2 \tag{80}$$

oder

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Omega,$$

wenn

$$\Omega = \Psi_1 \cdot \Psi_2 = (2\mathfrak{a}\mathfrak{a} - I) \cdot (2\mathfrak{b}\mathfrak{b} - I) \tag{81}$$

gesetzt ist.

Zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen die Achsen zweier Umklappungen und damit eindeutig einen Versor, wenn die Reihenfolge der Umklappungen festgesetzt ist. Andrerseits sind, wenn ein Versor gegeben ist, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht eindeutig bestimmt, weil die Drehung auf unendlich viele Weisen aus zwei Umklappungen aufgebaut werden kann.

151. Vektor der Drehung. Wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben sind, kann man daraus einen Vektor $\mathfrak{w}$ ableiten, der den Versor Ω eindeutig bestimmt und als V e k t o r d e r D r e h u n g bezeichnet werden soll.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &= \cos\frac{q}{2}, \\ \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &= \mathfrak{k} \sin\frac{q}{2}, \end{aligned} \tag{82}$$

wenn, wie früher, $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor der Drehachse bedeutet. Dann ist

$$\frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \mathfrak{k} \operatorname{tg}\frac{q}{2} = \mathfrak{w} \tag{83}$$

ein Vektor, der die Drehung e i n d e u t i g bestimmt (während der oben bereits aufgetretene Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{k} \sin\frac{q}{2}$ zwei Drehwinkel bestimmen würde).

D e r V e k t o r $\mathfrak{w}$ l ä ß t s i c h m i t H i l f e d e r b e i d e n I n v a r i a n t e n Ω_I und $\Omega_\times$ von Ω a u s d r ü c k e n. Eine derartige Darstellung ist deswegen von Wichtigkeit, weil sie den Vektor $\mathfrak{w}$ auch dann liefert, wenn der Versor in einer anderen Form als durch zwei Umklappungen gegeben ist.

Aus (81) folgt:

$$\Omega = 4\mathfrak{a}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\mathfrak{b} - 2\mathfrak{a}\mathfrak{a} - 2\mathfrak{b}\mathfrak{b} + I,$$

also ist

$$\Omega_I = 4(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 - 2 - 2 + 3 = 4(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 - 1$$

und

$$\Omega_\times = 4(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}.$$

Mithin wird

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}} = \frac{\Omega_\times}{\Omega_I + 1}. \tag{84}$$

Diese Formel läßt sich leicht verifizieren, wenn der Versor in der Form (75) gegeben ist.

Es soll jetzt der Vektor $\mathfrak{w}$ der Drehung, der den Versor Ω eindeutig bestimmt, in (76)

$$\Omega = (I - \mathfrak{k}\mathfrak{k})\cos q - (\mathfrak{k}\times I)\sin q + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

eingeführt werden. Zu diesem Zweck wird abkürzend:

$$\operatorname{tg}\frac{q}{2} = w; \quad \mathfrak{w} = w\mathfrak{k}$$

gesetzt. Dann wird:

$$\sin q = \frac{2w}{1+w^2}, \quad \cos q = \frac{1-w^2}{1+w^2};$$

mithin:

$$\Omega = \frac{1}{1+w^2}\left[(I - \mathfrak{k}\mathfrak{k})(1-w^2) - 2(\mathfrak{k}\times I)\,w + \mathfrak{k}\mathfrak{k}(1+w^2)\right].$$

Eine einfache Umformung ergibt:

$$\Omega = \frac{(1 - \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{w})I + 2\mathfrak{w}\mathfrak{w} - 2\mathfrak{w}\times I}{1 + \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{w}}. \tag{85}$$

Damit ist der Versor Ω allein durch den Vektor $\mathfrak{w}$ der Drehung ausgedrückt.

152. Cayleysche Formeln. Wenn man den Vektor $\mathfrak{w}$ auf ein Dreibein $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bezieht und in der Form

$$\mathfrak{w} = a\mathfrak{i} + b\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}$$

einführt, so gibt die Transformation

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Omega,$$

die durch den Versor Ω vermittelt wird, beim Übergang zu Koordinaten die berühmten *Cayleyschen Formeln*.

Bringt man den Nenner von (85) auf die linke Seite, so wird

$$\begin{aligned}
&(1 + a^2 + b^2 + c^2)\,\Omega \\
&\quad = (1 - a^2 - b^2 - c^2)(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) \\
&\quad + 2[a^2\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b^2\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c^2\mathfrak{k}\mathfrak{k} + ab(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}) + ac(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}) + bc(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j})] \\
&\quad - 2[a(\mathfrak{k}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{k}) + b(\mathfrak{i}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{i}) + c(\mathfrak{j}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{j})] \\
&\quad = (1 + a^2 - b^2 - c^2)\mathfrak{i}\mathfrak{i} + 2(ab + c)\mathfrak{i}\mathfrak{j} + 2(ac - b)\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\
&\quad + 2(ab - c)\mathfrak{j}\mathfrak{i} + (1 - a^2 + b^2 - c^2)\mathfrak{j}\mathfrak{j} + 2(bc + a)\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\
&\quad + 2(ac + b)\mathfrak{k}\mathfrak{i} + 2(bc - a)\mathfrak{k}\mathfrak{j} + (1 - a^2 - b^2 + c^2)\mathfrak{k}\mathfrak{k}.
\end{aligned}$$

In Koordinaten ergeben sich hieraus die Transformationsformeln für die Drehung:

$$(1+a^2+b^2+c^2)x' = (1+a^2-b^2-c^2)x + 2(ab-c)y + 2(ac+b)z;$$
$$(1+a^2+b^2+c^2)y' = 2(ab+c)x + (1-a^2+b^2-c^2)y + 2(bc-a)z;$$
$$(1+a^2+b^2+c^2)z' = 2(ac-b)x + 2(bc+a)y + (1-a^2-b^2+c^2)z. \tag{86}$$

x', y', z' sind linear durch x, y, z dargestellt mit Koeffizienten, die rationale Funktionen dreier Parameter sind.

153. Zusammensetzung zweier Drehungen. Durch Zusammensetzung zweier Drehungen (um zwei durch denselben Punkt gehende Achsen) entsteht eine neue Drehung (um eine durch denselben Punkt gehende Achse).

Wird die erste Drehung durch die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Omega_1,$$

die zweite durch

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r}' \cdot \Omega_2$$

vermittelt, wo Ω_1 und Ω_2 zwei Versoren bedeuten, so wird die resultierende Drehung durch

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{r} \cdot \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

gegeben. Der Versor der resultierenden Drehung

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2 \tag{87}$$

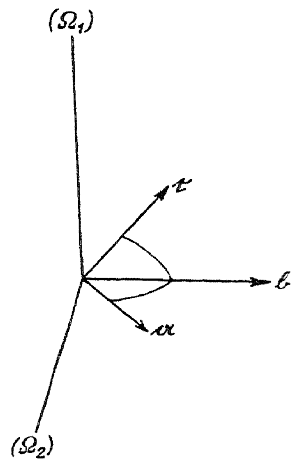


Fig. 66.

und damit die resultierende Drehung selbst hängt von der Reihenfolge ab, in der die beiden ursprünglichen Drehungen aufeinander folgen.

Um den Versor Ω der resultierenden Drehung zu berechnen, ist es nicht günstig, Ω_1 und Ω_2 nach (76) oder (85) mittels der zugehörigen Vektoren der Drehung aufzustellen; vielmehr empfiehlt sich ein Aufbau jeder Drehung aus zwei passend gewählten Umklappungen (Fig. 66).

Jede Drehung läßt sich aus zwei Umklappungen aufbauen, deren Achsen den halben Winkel der Drehung einschließen und in der Ebene senkrecht zur Drehachse durch den Anfangspunkt liegen, in dieser aber nicht weiter festgelegt sind. Will man zwei Drehungen zusammensetzen, so kann man zunächst jede von ihnen derart in zwei Umklappungen zerlegen, daß die Umklappung um das gemeinsame Lot auf beiden Drehachsen in der Zerlegung

jeder der beiden Drehungen vorkommt. Man setzt die Versoren Ω_1 und Ω_2 der beiden Drehungen in die Form

$$\Omega_1 = \Psi_a \cdot \Psi_b, \quad \Omega_2 = \Psi_b \cdot \Psi_c, \tag{88}$$

wo Ψ_b die Umklappung um das gemeinsame Lot $\mathfrak{b}$ bedeutet; die Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ der beiden Umklappungen Ψ_a und Ψ_c sind damit bestimmt.

Der bei der Multiplikation zweier Versoren Ω_1 und Ω_2 entstehende Versor

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

wird dann, da

$$\Psi_b \cdot \Psi_b = I$$

ist,

$$\Omega = \Psi_a \cdot \Psi_c. \tag{88'}$$

Die durch Zusammensetzung der beiden Drehungen entstehende Drehung erscheint selbst aus den beiden Umklappungen Ψ_a und Ψ_c aufgebaut. —

154. Konstruktion der resultierenden Drehung. Es gibt Konstruktionen auf der Einheitskugel, die die resultierende Drehung finden lassen.

In dem sphärischen Dreieck, das durch die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bestimmt ist, sind die Längen der drei Seiten (Fig. 67)

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{q_1}{2}, \quad (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \frac{q_2}{2}, \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \frac{q}{2},$$

wenn q_1, q_2, q die zu den Versoren Ω_1, Ω_2, Ω gehörigen Drehwinkel sind. Wenn man auf der Kugel durch eine Verschiebung auf einem größten Kreis nach Betrag und Richtungssinn einen gerichteten Bogen definiert, so kann man die Seite $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ als eine geometrische, nicht kommutative Summe der Seiten $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ auffassen. Repräsentiert man eine endliche Drehung durch einen gerichteten Bogen, der in dem auf der Drehachse senkrechten größten Kreis liegt, dessen Richtungssinn mit dem Richtungssinn der Drehachse eine Rechtsschraube bildet und dessen Betrag gleich dem Betrag des halben Drehwinkels ist, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ das Bild derjenigen Drehung, die durch Aufeinanderfolge der durch $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ dargestellten Drehungen entsteht.

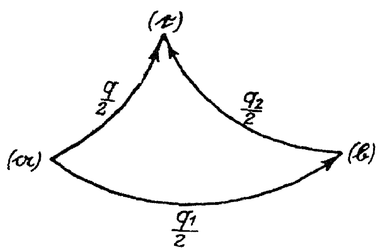


Fig. 67.

Kehrt man den Richtungssinn der Seite $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ um, setzt also $\frac{q_3}{2} = -\frac{q}{2}$, so repräsentieren die gerichteten Bogen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{c}, \mathfrak{a})$ drei Drehungen, deren Aufeinanderfolge die Identität ergibt.

Die zugehörigen Drehachsen bestimmen das Polardreieck des Dreiecks $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$. Seine Außenwinkel sind $\frac{q_1}{2}, \frac{q_2}{2}, \frac{q_3}{2}$. Also ergibt die Aufeinanderfolge dreier Drehungen, deren Achsen durch die Ecken eines sphärischen Dreiecks gehen, um die doppelten Außenwinkel die Identität. Die Drehungen um die doppelten Außenwinkel können auch durch Drehungen um die doppelten Dreieckswinkel selbst mit entgegengesetztem Drehsinn ersetzt werden.

155. Der Vektor der resultierenden Drehung. Da die Zusammensetzung zweier Drehungen nach Ziff. 153 nicht kommutativ ist, kann es auf keine Weise möglich sein, jeder Drehung einen Vektor so zuzuordnen, daß der resultierenden Drehung die Summe der den ursprünglichen Drehungen zugeordneten Vektoren zuzuordnen wäre. So gilt insbesondere für die Ziff. 151 definierten Vektoren der Drehung ein weniger einfaches Gesetz der Zusammensetzung, das in Kürze abgeleitet werden soll.

Die zu den Versoren: Ω_1, Ω_2 und $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ gehörigen Vektoren der Drehung sollen mit $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}$ bezeichnet werden; wegen des Aufbaus der drei Drehungen aus je zwei Umklappungen um zwei durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bestimmte Richtungen ist nach (83)

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{w}_2 = \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}}{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}.$$

Um eine Beziehung zwischen $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ und $\mathfrak{w}$ herzustellen, soll zuerst ein auf $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ senkrechter, also in Richtung von $\mathfrak{b}$ fallender Vektor [vgl. Ziff. 22]

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\mathfrak{b}$$

in Komponenten in Richtung von $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}$ zerlegt werden. Hierzu setzt man mit unbestimmten Koeffizienten p, q, r:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = p(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + q(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + r(\mathfrak{a} \times \mathfrak{c})$$

und bestimmt p, q, r durch skalare Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$:

$$p = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}, \quad q = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}, \quad r = -1;$$

damit wird

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) - \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$$

oder

$$\mathfrak{w}_1 \times \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}\,\frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}.$$

Hier stört noch der Koeffizient von $\mathfrak{w}$; er läßt sich durch das skalare Produkt von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$\mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}} = 1 - \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}};$$

also:

$$\mathfrak{w}_1 \times \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + (\mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 - 1)\mathfrak{w}.$$

Damit ist der Vektor $\mathfrak{w}$ der resultierenden Drehung durch die Vektoren $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ der ursprünglichen Drehungen ausgedrückt; also:

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1 \times \mathfrak{w}_2}{1 - \mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2}. \tag{89}$$

§ 4. Invarianten einer Dyade.

156. Dritter Skalar. Als erster Skalar einer Dyade

$$\Phi = \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\mu$$

wurde die in den Maßzahlen von Φ lineare skalare Invariante

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \sum a_{\lambda\mu}\, \mathfrak{i}_\lambda \cdot \mathfrak{i}_\mu = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

bezeichnet und (Ziff. 139) untersucht. Neben ihr gibt es noch eine Anzahl weiterer voneinander unabhängiger Invarianten, die von höherem als erstem Grad sind.

Zu einer Invariante dritten Grades, dem dritten Skalar Φ_{III}, kommt man durch eine geometrische Betrachtung. Eine affine Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

ordnet einem Parallelepiped, dessen Kanten drei beliebige Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ sind, ein Parallelepiped mit den Kanten:

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} \cdot \Phi, \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w} \cdot \Phi$$

zu. Dann ist der Quotient aus dem Volumen V' des transformierten und dem Volumen V des ursprünglichen Parallelepipeds unabhängig von der Wahl des ursprünglichen Parallelepipeds.

Dieser Satz gilt ohne weiteres für die einfache Dehnung und für die aus einfachen Dehnungen zusammengesetzte reine Dehnung; außerdem für die reine Drehung, da bei der Drehung jedes Volumen ungeändert bleibt. Da sich jede Affinität aus einer reinen Dehnung und einer Drehung zusammensetzen läßt, gilt er allgemein.

Der Quotient der beiden Volumina V' und V hängt also nur von der verwendeten affinen Abbildung oder von der sie vermittelnden Dyade Φ ab; er ist eine Invariante von Φ.

Nimmt man Φ in der Normalform

$$\Phi = a\,\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + b\,\mathfrak{j}\mathfrak{j}' + c\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}', \tag{90}$$

so läßt sich der Quotient der beiden Volumina bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ leicht berechnen. Setzt man

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{k},$$

so sind die entsprechenden Vektoren

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u} \cdot \Phi = a\mathfrak{i}', \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} \cdot \Phi = b\mathfrak{j}', \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w} \cdot \Phi = c\mathfrak{k}'.$$

Der Quotient der beiden Volumina ist

$$\frac{V'}{V} = \frac{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']}{[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]} = abc\frac{[\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}']}{[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]} = abc.$$

Er ist eine Invariante 3. Grades in den Maßzahlen von Φ und wird als dritter Skalar Φ_{III} von Φ bezeichnet:

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \frac{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']}{[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]}. \tag{91}$$

Für die Normalform (90) von Φ wird

$$\Phi_{\mathrm{III}} = abc. \tag{92}$$

Ist die Dyade Φ in der neungliedrigen Form gegeben:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ & + a_{21}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ & + a_{31}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}\end{aligned}$$

und setzt man wieder

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{k},$$

so wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}' &= \mathfrak{u} \cdot \Phi = a_{11}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{k}; \\ \mathfrak{v}' &= \mathfrak{v} \cdot \Phi = a_{21}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{k}; \\ \mathfrak{w}' &= \mathfrak{w} \cdot \Phi = a_{31}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Dann ist wegen $V = 1$:

$$\Phi_{\mathrm{III}} = V' = [\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']$$

oder (Ziff. 19)

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{93}$$

Diese Determinante ist schon wiederholt aufgetreten. Ziff. 27 wurde bemerkt, daß sie für ausgeartete Affinitäten verschwindet. Da eine ausgeartete (planare oder lineare) Dyade jedem Volumen V ein verschwindendes Volumen V' zuordnet, ist das Verschwinden von Φ_{III} für ausgeartete Dyaden charakteristisch.

Infolgedessen verschwindet der dritte Skalar für jede antisymmetrische Dyade Φ'':

$$\Phi''_{\mathrm{III}} = 0. \tag{94}$$

Noch einige Sätze verdienen bemerkt zu werden:

Der dritte Skalar eines Versors

$$\Omega = \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$

ist Eins nach (92)

$$\Omega_{\mathrm{III}} = 1. \tag{95}$$

Diese Gleichung ist der Ausdruck der oben erwähnten Volumtreue der Drehung.

Bildet man das skalare Produkt zweier Dyaden [Ziff. 135 (8)]

$$\Phi \cdot \Psi = X,$$

so läßt sich die Gleichung (9) jetzt in die Form

$$\Phi_{\mathrm{III}} \Psi_{\mathrm{III}} = X_{\mathrm{III}}$$

oder

$$(\Phi \cdot \Psi)_{\mathrm{III}} = \Phi_{\mathrm{III}} \Psi_{\mathrm{III}} \tag{96}$$

setzen.

Endlich kann man den dritten Skalar $\bar{\Phi}_{\mathrm{III}}$ der konjugierten Dyade $\bar{\Phi}$ bilden, indem man in der Determinante (93) die ersten und zweiten Indizes vertauscht; dann werden Zeilen und Spalten vertauscht, der Wert der Determinante aber nicht geändert. Folglich ist

$$\bar{\Phi}_{\mathrm{III}} = \Phi_{\mathrm{III}}. \tag{97}$$

157. Zweiter Skalar. Um zu einer weiteren Invariante von Φ zu gelangen, bilden wir zunächst den ersten Skalar der zu Φ reziproken Dyade (14)

$$\Phi^{-1} = \sum \bar{a}_{\varrho\sigma} \mathfrak{i}_\varrho \mathfrak{i}_\sigma;$$

Φ ist als vollständige Dyade vorausgesetzt.

$\bar{a}_{\varrho\sigma}$ bedeutet wie früher den reduzierten Minor von $a_{\sigma\varrho}$ in Φ_{III}. Bezeichnen wir den Minor von $a_{\sigma\varrho}$ selbst mit $A_{\varrho\sigma}$, so ist

$$\bar{a}_{\varrho\sigma} = \frac{A_{\varrho\sigma}}{\Phi_{\mathrm{III}}}.$$

Dann wird der erste Skalar von Φ^{-1}

$$(\Phi^{-1})_{\mathrm{I}} = \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + \bar{a}_{33} = \frac{1}{\Phi_{\mathrm{III}}} (A_{11} + A_{22} + A_{33}).$$

Die so gefundene Invariante ist vom (-1)ten Grad; aus ihr läßt sich durch Multiplikation mit Φ_{III} eine Invariante zweiten Grades erhalten, die als zweiter Skalar Φ_{II} von Φ bezeichnet wird:

$$\Phi_{\mathrm{II}} = \Phi_{\mathrm{III}} (\Phi^{-1})_{\mathrm{I}} = A_{11} + A_{22} + A_{33}. \tag{98}$$

Φ_{II} ist die Summe der Diagonalminoren von Φ_{III}; ausführlich geschrieben wird

$$\Phi_{II} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{98'}$$

oder

$$\Phi_{II} = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{31}. \tag{98''}$$

Bei Vertauschung der ersten und zweiten Indizes ändert sich die rechte Seite von (98′) nicht; damit ist auch der zweite Skalar $\overline{\Phi}_{II}$ der konjugierten Dyade $\overline{\Phi}$ gefunden:

$$\overline{\Phi}_{II} = \Phi_{II}. \tag{99}$$

158. Neue Herleitung des zweiten Skalars. Bei der Ableitung des Ausdrucks (98) für Φ_{II} ist vorausgesetzt, daß Φ eine vollständige Dyade ist, also Φ_{III} nicht verschwindet. Der Ausdruck Φ_{II} hat aber auch für ausgeartete Dyaden einen bestimmten endlichen Wert, dessen Invariantencharakter sich nachweisen läßt.

Hierzu bildet man den dritten Skalar der Dyade $\Phi - \lambda I$, wo λ einen Parameter bedeutet, und entwickelt ihn nach Potenzen von λ:

$$(\Phi - \lambda I)_{III} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \Phi_{III} - \lambda\,\Phi_{II} + \lambda^2\,\Phi_I - \lambda^3. \tag{100}$$

Da die linke Seite für jeden Wert von λ eine Invariante ist, müssen die Koeffizienten der kubischen Form auf der rechten Seite: Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III} Invarianten sein.

Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III} stimmen mit den früher so bezeichneten Größen (31 a), (98′), (93) überein.

159. Verwendung des Vektors $\Phi_\times$ zur Bildung skalarer Invarianten. Da der Vektor $\Phi_\times$ eine vektorielle Invariante der Dyade Φ ist, erhält man eine skalare Invariante, wenn man seinen Betrag $|\Phi_\times|$ oder besser das skalare Produkt $\Phi_\times \cdot \Phi_\times$ bildet. Nach (31 b) ist

$$\Phi_\times \cdot \Phi_\times = (a_{12} - a_{21})^2 + (a_{23} - a_{32})^2 + (a_{13} - a_{31})^2. \tag{101}$$

Weitere skalare Invarianten ergeben sich, wenn man die Dyade Φ selbst oder eine Potenz Φ^n von Φ zweimal nacheinander mit Vektoren $\Phi_\times$ skalar multipliziert; solche Invarianten sind

$$\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times, \quad \Phi_\times \cdot \Phi^2 \cdot \Phi_\times, \cdots \quad \Phi_\times \cdot \Phi^n \cdot \Phi_\times.$$

Unter ihnen wird nur eine beschränkte Zahl voneinander unabhängig sein. [Vgl. Ziff. 160.]

Die so gefundenen Invarianten können zur Bildung der zweiten und dritten Skalare des symmetrischen Teils Φ' und antisymmetrischen Teils Φ'' einer Dyade Φ Verwendung finden. Ist Φ wie bisher in der Neunerform gegeben, so folgen aus den in (29) angegebenen Ausdrücken für Φ' und Φ'' die beiden zweiten Skalare

$$\begin{aligned}\Phi'_{II} &= a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} \\ &\quad - \frac{1}{4}(a_{12}+a_{21})^2 - \frac{1}{4}(a_{23}+a_{32})^2 - \frac{1}{4}(a_{13}+a_{31})^2; \\ \Phi''_{II} &= \frac{1}{4}(a_{12}-a_{21})^2 + \frac{1}{4}(a_{23}-a_{32})^2 + \frac{1}{4}(a_{13}-a_{31})^2.\end{aligned}$$

Zieht man noch den Ausdruck (98″) für Φ_{II} heran, so erkennt man

$$\Phi_{II} = \Phi'_{II} + \Phi''_{II}. \tag{102}$$

Ferner folgt nach (101):

$$\Phi''_{II} = \frac{1}{4}\Phi_{\times}\cdot\Phi_{\times}, \tag{103a}$$

folglich ist:

$$\Phi'_{II} = \Phi_{II} - \frac{1}{4}\Phi_{\times}\cdot\Phi_{\times}. \tag{103b}$$

In ähnlicher Weise kann der dritte Skalar einer Dyade Φ mit dem dritten Skalar ihres symmetrischen Teiles Φ' in Beziehung gesetzt werden. Um die Rechnung in einfacher Weise zu führen, denken wir uns die Achsen des Koordinatensystems in die Hauptachsen der Tensorflächen von Φ' gelegt. Dann erscheint Φ' in der Normalform

$$\Phi' = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

und Φ selbst in der Form

$$\Phi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k} + l(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j}) + m(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}) + n(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}). \tag{104}$$

Dann sind die dritten Skalare:

$$\Phi'_{III} = abc;$$

$$\Phi_{III} = \begin{vmatrix} a & n & -m \\ -n & b & l \\ m & -l & c \end{vmatrix} = abc + (l^2a + m^2b + n^2c) \tag{105}$$

Weiter ist

$$\Phi_{\times} = 2(l\mathfrak{i} + m\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}).$$

Man bemerkt, daß sich Φ_{III} und Φ'_{III} um ein Polynom unterscheiden, das in den Maßzahlen von Φ' linear, in denen von $\Phi_{\times}$ vom zweiten Grad ist. Um dieses Polynom in eine invariante Form zu bringen, berechnen wir versuchsweise $\Phi_{\times}\cdot\Phi'\cdot\Phi_{\times}$:

$$\Phi_{\times}\cdot\Phi'\cdot\Phi_{\times} = 4(l^2a + m^2b + n^2c).$$

Mithin ist

$$\Phi_{III} = \Phi'_{III} + \frac{1}{4}\Phi_\times \cdot \Phi' \cdot \Phi_\times .$$

In dem letzten Summand kann Φ' durch Φ ersetzt werden, da nach (42)

$$\Phi'' \cdot \Phi_\times = 0$$

ist; also gilt die Beziehung:

$$\Phi'_{III} = \Phi_{III} - \frac{1}{4}\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times . \tag{106a}$$

Der Vollständigkeit halber mag man sich erinnern, daß der dritte Skalar der ausgearteten Dyade Φ'' Null ist, also

$$\Phi''_{III} = 0 . \tag{106b}$$

160. Vollständiges System von Invarianten. Nimmt man wieder eine symmetrische Dyade Φ' in der Normalform an:

$$\Phi' = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k},$$

so werden ihre drei Skalare

$$\begin{aligned} \Phi'_I &= a + b + c, \\ \Phi'_{II} &= ab + bc + ac, \\ \Phi'_{III} &= abc. \end{aligned} \tag{107}$$

Sind die drei Skalare gegeben, so kann man aus ihnen die drei Hauptdehnungen a, b, c als Wurzeln einer kubischen Gleichung berechnen; damit ist Φ' bis auf eine Drehung bestimmt.

Ist Φ eine nicht symmetrische Dyade (104)

$$\Phi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k} + l(\mathfrak{j}\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\mathfrak{j}) + m(\mathfrak{k}\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{k}) + n(\mathfrak{i}\mathfrak{j} - \mathfrak{j}\mathfrak{i}),$$

so kann man die drei Skalare ihres symmetrischen Teiles Φ' nach (35a), (103b), (106a) aus Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III}, $\Phi_\times$ und Φ selbst aufbauen:

$$\begin{aligned} \Phi'_I &= \Phi_I; \\ \Phi'_{II} &= \Phi_{II} - \frac{1}{4}\Phi_\times \cdot \Phi_\times; \\ \Phi'_{III} &= \Phi_{III} - \frac{1}{4}\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times . \end{aligned} \tag{108}$$

Die Kenntnis von Φ'_I, Φ'_{II}, Φ'_{III} genügt nach obigem zur Berechnung von a, b, c, während man l, m, n aus $\Phi_\times$ entnehmen kann.

Mit den 5 Invarianten Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III}, $\Phi_\times \cdot \Phi_\times$, $\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times$, die beim Aufbau von Φ'_I, Φ'_{II}, Φ'_{III} auftreten, ist aber die Anzahl der unabhängigen skalaren Invarianten von Φ noch nicht erschöpft. Es gibt

vielmehr noch eine sechste Invariante, für die etwa $\Phi_\times \cdot \Phi^2 \cdot \Phi_\times$ gewählt werden kann. Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\,\Phi_\times \cdot \Phi_\times \qquad &= l^2 + m^2 + n^2; \\ \frac{1}{4}\,\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times &= l^2 a + m^2 b + n^2 c; \\ \frac{1}{4}\,\Phi_\times \cdot \Phi^2 \cdot \Phi_\times &= l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2 \end{aligned} \tag{109}$$

liefern, wenn die links stehenden Invarianten gegeben sind, die Werte l, m, n, die den antisymmetrischen Teil der Dyade Φ, bezogen auf das System der Hauptachsen bestimmen, bis auf die Vorzeichen. Damit ist die Dyade Φ bis auf eine Drehung bestimmt, wenn auch nicht eindeutig.

Die angeführten 6 Invarianten bilden ein vollständiges System. Jede weitere Invariante von Φ läßt sich nach Elimination von a, b, c, l, m, n mittels dieser 6 Invarianten darstellen.

161. Doppeltskalares Produkt zweier Dyaden. Für die Bildung weiterer skalarer invarianter Ausdrücke ist das Ziff. 37 durch die Definitionsgleichung

$$\mathfrak{s} \cdot (\mathfrak{r} \cdot \Phi) = \mathfrak{s}\mathfrak{r} \cdot\cdot\, \Phi = \Phi \cdot\cdot\, \mathfrak{s}\mathfrak{r}$$

eingeführte doppeltskalare Produkt brauchbar. Da in Verbindung mit der Addition nach Ziff. 37 das distributive Gesetz gilt, ist auch das doppeltskalare Produkt zweier Dyaden $\Phi \cdot\cdot\, \Psi$ ein eindeutig definierter skalarer Ausdruck. Führt man die beiden Multiplikationen nacheinander aus, so erkennt man, daß das doppeltskalare Produkt $\Phi \cdot\cdot\, \Psi$ die erste Invariante der Dyade $\Phi \cdot \Psi$ ist; also

$$\Phi \cdot\cdot\, \Psi = (\Phi \cdot \Psi)_I. \tag{110}$$

Bei der Bildung des doppeltskalaren Produktes liefern, wenn Φ und Ψ auf dasselbe Dreibein bezogen sind, nur diejenigen Paare von Komponenten von Φ und Ψ einen Beitrag, die die nämlichen Grundvektoren in umgekehrter Reihenfolge enthalten; so sind $\mathfrak{i}\mathfrak{j} \cdot\cdot\, \mathfrak{j}\mathfrak{i}$ oder $\mathfrak{k}\mathfrak{k} \cdot\cdot\, \mathfrak{k}\mathfrak{k}$ von Null verschieden.

Daraus folgt, daß das doppeltskalare Produkt aus einer symmetrischen Dyade Φ' und einer antisymmetrischen Dyade Ψ'' verschwindet:

$$\Phi' \cdot\cdot\, \Psi'' = 0. \tag{111}$$

Denn wenn man Φ' auf das Dreibein in Richtung der Hauptachsen bezieht, treten in Φ' nur dyadische Produkte von gleichen Einheitsvektoren auf, während in Ψ'' nur solche von ungleichen Einheitsvektoren vorkommen.

In ähnlicher Weise bestätigt man leicht durch Ausrechnen, daß das doppeltskalare Produkt zweier antisymmetrischer Dyaden Φ'' und Ψ'' folgenden Wert besitzt:

$$\Phi'' \cdot\cdot \Psi'' = -\frac{1}{2} \Phi_\times \cdot \Psi_\times. \tag{112}$$

Es ist nämlich nach (110), (43 b) und dem Vertauschungssatz

$$\Phi'' \cdot\cdot \Psi'' = (\Phi'' \cdot \Psi'')_I = -\frac{1}{2} (\Phi_\times \times \Psi'')_I = -\frac{1}{2} \Phi_\times \cdot \Psi_\times.$$

162. Beispiel für die Reduktion einer Invariante. Jetzt kann die Aufgabe in Angriff genommen werden, das doppeltskalare Produkt einer Dyade Φ mit sich selbst zu berechnen, d. h. auf die fundamentalen Invarianten von Φ zurückzuführen. Zerlegt man Φ in symmetrischen und antisymmetrischen Teil, so wird

$$\begin{aligned}\Phi \cdot\cdot \Phi &= (\Phi' + \Phi'') \cdot\cdot (\Phi' + \Phi'') \\ &= \Phi' \cdot\cdot \Phi' + \Phi' \cdot\cdot \Phi'' + \Phi'' \cdot\cdot \Phi' + \Phi'' \cdot\cdot \Phi''.\end{aligned}$$

Nach (110), (111), (112) ergibt sich hieraus

$$\Phi \cdot\cdot \Phi = (\Phi^2)_I = (\Phi'^2)_I - \frac{1}{2} \Phi_\times \cdot \Phi_\times. \tag{113}$$

Zur Berechnung von $(\Phi'^2)_I$ soll Φ' in die Normalform

$$\Phi' = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

gesetzt werden; dann ist

$$\Phi'^2 = a^2\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b^2\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c^2\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

und

$$(\Phi'^2)_I = a^2 + b^2 + c^2.$$

Aus (107) ist jetzt ersichtlich, daß

$$(\Phi'^2)_I = (\Phi'_I)^2 - 2\Phi'_{II} \tag{114}$$

ist; mithin wird nach (113)

$$(\Phi^2)_I = (\Phi'_I)^2 - 2\Phi'_{II} - \frac{1}{2} \Phi_\times \cdot \Phi_\times.$$

Mittels (108) kann man an Stelle von Φ'_I und Φ'_{II} die Invarianten von Φ selbst einführen; es ergibt sich

$$\Phi \cdot\cdot \Phi = (\Phi^2)_I = (\Phi_I)^2 - 2\Phi_{II}. \tag{115}$$

Damit ist die Reduktion von $\Phi \cdot\cdot \Phi$ oder $(\Phi^2)_I$ auf die fundamentalen Invarianten von Φ durchgeführt und im übrigen die Gültigkeit der für symmetrische Dyaden ziemlich trivialen Relation (114) für beliebige Dyaden nachgewiesen.

163. Identitäten. Mit Hilfe des doppeltskalaren Produktes läßt sich ein Ausdruck für die Divergenz eines Vektors $\mathfrak{v} \cdot \Phi$ bilden.

wenn $\mathfrak{v}$ ein Feldvektor, Φ eine konstante Dyade ist. Nach der Definition des doppeltskalaren Produktes ist

$$\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\cdot\Phi) = \nabla\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\cdot\cdot\,\Phi = (\nabla\mathfrak{v})\cdot\cdot\,\Phi. \tag{116a}$$

Ähnlich ist

$$\nabla\cdot\Phi\cdot\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} = \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\cdot\overline{\Phi}) = (\nabla\mathfrak{v})\cdot\cdot\,\overline{\Phi}. \tag{116b}$$

Etwas allgemeinere Formeln ergeben sich, wenn Φ eine Felddyade ist, und sich die Differentiation auch auf Φ erstreckt, dann wird

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathfrak{v}\cdot\Phi) &= (\nabla\mathfrak{v})\cdot\cdot\,\Phi + (\nabla\cdot\overline{\Phi})\cdot\mathfrak{v};\\ \nabla\cdot(\Phi\cdot\mathfrak{v}) &= (\nabla\cdot\Phi)\cdot\mathfrak{v} + (\nabla\mathfrak{v})\cdot\cdot\,\overline{\Phi}.\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Von Interesse ist ein spezieller Fall von (116b); ersetzt man $\mathfrak{v}$ durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$, so kommt

$$\nabla\cdot\Phi\cdot\overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = \nabla\overset{\downarrow}{\mathfrak{r}}\cdot\cdot\,\overline{\Phi} = I\cdot\cdot\,\overline{\Phi} = \Phi_{\mathrm{I}}. \tag{118}$$

Bei dieser Gelegenheit mag eine ähnliche Identität

$$\nabla\cdot\Phi\times\overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = -\Phi_{\times} \tag{119}$$

Erwähnung finden, die allerdings mit den bisherigen Mitteln anscheinend nicht in invarianter Form abgeleitet werden kann. Um sie zu beweisen, setzt man

$$\nabla\cdot\Phi\times\overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = \sum\mathfrak{i}_\varrho\frac{\partial}{\partial x_\varrho}\cdot\sum a_{\lambda\mu}\mathfrak{i}_\lambda\mathfrak{i}_\mu\times\sum\mathfrak{i}_\sigma x_\sigma$$

und bemerkt, daß jeder Summand des ersten Faktors bei der Differentiation nur auf den *einen* Summand des dritten Faktors Einfluß hat, für welchen $\sigma=\varrho$ ist, während er bei der skalaren Multiplikation nur mit den Summanden des zweiten Faktors verbunden wird, für welche $\lambda=\varrho$ ist. Also wird

$$\nabla\cdot\Phi\times\overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = \sum a_{\varrho\mu}\mathfrak{i}_\mu\times\mathfrak{i}_\varrho = -\Phi_{\times}.$$

164. Die drei Skalare einer Dyade als Quotienten je zweier Volumina. Wenn durch die affine Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Phi$$

drei beliebigen Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ drei Vektoren

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}\cdot\Phi,\quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}\cdot\Phi,\quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}\cdot\Phi$$

zugeordnet werden, läßt sich der dritte Skalar von Φ nach (91) in die Form

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \frac{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]} \tag{120}$$

setzen. Ähnliche Ausdrücke gelten auch für den ersten und zweiten Skalar, und zwar ist

$$\Phi_I = \frac{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}\mathfrak{w}] + [\mathfrak{u}\mathfrak{v}'\mathfrak{w}] + [\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}']}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}; \tag{121a}$$

$$\Phi_{II} = \frac{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}'\mathfrak{w}'] + [\mathfrak{u}'\mathfrak{v}\mathfrak{w}'] + [\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}]}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}. \tag{121b}$$

Jeder der drei Skalare erscheint dann als Quotient zweier Volumina.

Die Formel (121a) läßt sich folgendermaßen beweisen: Die Dyade Φ, die die oben festgelegte Abbildung vermittelt, kann nach Ziff. 134 (4) in der Form

$$\Phi = \mathfrak{u}^*\mathfrak{u}' + \mathfrak{v}^*\mathfrak{v}' + \mathfrak{w}^*\mathfrak{w}' \tag{122}$$

angegeben werden, wo $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ die zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ reziproken Vektoren sind:

$$\mathfrak{u}^* = \frac{\mathfrak{v}\times\mathfrak{w}}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}, \quad \mathfrak{v}^* = \frac{\mathfrak{w}\times\mathfrak{u}}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}, \quad \mathfrak{w}^* = \frac{\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}. \tag{123}$$

Dann ist der erste Skalar von Φ

$$\Phi_I = \mathfrak{u}^*\cdot\mathfrak{u}' + \mathfrak{v}^*\cdot\mathfrak{v}' + \mathfrak{w}^*\cdot\mathfrak{w}';$$

führt man hierin für $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ die Ausdrücke (123) ein, so ergibt sich (121a).

Um die Formel (121b) zu beweisen, erinnert man sich, daß nach (98)

$$\Phi_{II} = \Phi_{III}(\Phi^{-1})_I$$

ist. $(\Phi^{-1})_I$ geht aus Φ_I dadurch hervor, daß in (121a) $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ vertauscht werden; also

$$(\Phi^{-1})_I = \frac{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}'\mathfrak{w}'] + [\mathfrak{u}'\mathfrak{v}\mathfrak{w}'] + [\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}]}{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']};$$

durch Multiplikation mit Φ_{III} entsteht in der Tat der in (121b) für Φ_{II} angegebene Ausdruck.

Die Gleichungen (121a), (121b), (120) gestatten die Berechnung der Invarianten einer Dyade, die in der Form

$$\Phi = a\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + b\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + c\mathfrak{c}^*\mathfrak{c} \tag{124}$$

gegeben ist, wo $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ das System der zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reziproken Vektoren bilden. Diese Dyade ordnet durch die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\cdot\Phi$$

den drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ drei gleichgerichtete Vektoren $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ zu. Mithin wird

$$\begin{aligned} \Phi_I &= a + b + c, \\ \Phi_{II} &= bc + ac + ab, \\ \Phi_{III} &= abc. \end{aligned} \tag{125}$$

Diese Darstellung der drei Skalare ist wichtig, weil, wie später (siehe Ziff. 167) bemerkt wird, jede Dyade (mit gewissen Einschränkungen) in die Form (124) gesetzt werden kann.

165. Die duale Dyade. Da bei einer affinen Abbildung die Orthogonalität zweier Richtungen im allgemeinen zerstört wird, geht die Ergänzung $\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}$ der von zwei Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gebildeten Plangröße nicht in die Ergänzung $\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}'$ der von den Bildvektoren $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w}'$ gebildeten Plangröße über. Wenn also die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi \tag{126}$$

den Vektoren $\mathfrak{r}$ eines Raumes die Vektoren $\mathfrak{r}'$ eines Bildraumes zuordnet, so ordnet diese lineare Vektorfunktion den (durch ihre Ergänzung gegebenen) Plangrößen des ersten Raumes *nicht* die Plangrößen des zweiten zu. Es gibt indessen eine andere lineare Vektorfunktion, die diese Zuordnung leistet; sie kann folgendermaßen erhalten werden.

Aus der Definition (91) des dritten Skalars

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \frac{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]}$$

folgt

$$\mathfrak{u} \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w})\, \Phi_{\mathrm{III}} = \mathfrak{u}' \cdot (\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}') = \mathfrak{u} \cdot \Phi \cdot (\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}');$$

da die Gleichheit der links und rechts stehenden Ausdrücke für jeden Vektor $\mathfrak{u}$ gilt, ist

$$(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w})\, \Phi_{\mathrm{III}} = \Phi \cdot (\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}')$$

oder

$$\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}' = (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) \cdot \overline{\Phi}^{-1} \Phi_{\mathrm{III}}. \tag{127a}$$

Damit ist die *lineare Vektorfunktion* gefunden, *die die Plangrößen transformiert.*

Diese Gleichung kann, wenn man Φ_{III} unter Hinzunahme eines dritten Vektors $\mathfrak{u}$ als Quotient zweier Volumina schreibt, in die Form

$$\frac{\mathfrak{v}' \times \mathfrak{w}'}{[\mathfrak{u}'\mathfrak{v}'\mathfrak{w}']} = \frac{\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}}{[\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}]} \cdot \overline{\Phi}^{-1} \tag{127b}$$

gesetzt werden. Führt man die zu $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ reziproken Systeme $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{w}^*$ und $(\mathfrak{u}')^*$, $(\mathfrak{v}')^*$, $(\mathfrak{w}')^*$ ein, so folgt

$$(\mathfrak{u}')^* = \mathfrak{u}^* \cdot \overline{\Phi}^{-1}. \tag{127c}$$

Damit ist eine zweite affine Abbildung gefunden, die als zu der gegebenen Abbildung *dual* bezeichnet wird. Sie ordnet die zu

zwei sich bei der gegebenen Affinität entsprechenden Grundsystemen reziproken Grundsysteme einander zu. $\overline{\Phi}^{-1}$ heißt die zu Φ duale Dyade; die duale Beziehung ist gegenseitig.

Wenn es sich nur darum handelt, die durch (127c) definierte duale Abbildung herzustellen, braucht man die duale Dyade selbst gar nicht zu verwenden; man kann sich von dem Gebrauch der konjugierten Dyade $\overline{\Phi}$ wieder frei machen und (127c) in die Form

$$(\mathfrak{u}')^* = \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{u}^* \tag{127d}$$

setzen. Zur völligen Klarheit über die Beziehungen zwischen den beiden Abbildungen und den zugehörigen Transformationen kommt man, wenn man (126) und (127d) für zwei Paare entsprechender Vektoren samt den inversen Formeln (vgl. Ziff. 136) zusammenstellt:

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u} \cdot \Phi \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' \cdot \Phi^{-1}; \tag{128a}$$

$$(\mathfrak{u}')^* = \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{u}^* \quad \mathfrak{u}^* = \Phi \cdot (\mathfrak{u}')^*. \tag{128b}$$

Die Transformationen (128a) und (128b) werden als zueinander kontragredient bezeichnet; wir werden uns in etwas anderer Form noch viel damit beschäftigen (Kap. 6).

166. Cayley-Hamiltonsche Gleichung. Zur Bestimmung einer vollständigen Dyade sind neun Konstante notwendig. Daher besteht zwischen höchstens zehn Dyaden stets eine lineare Beziehung. In besonderen Fällen kann eine lineare Beziehung zwischen weniger als zehn Dyaden bestehen. So gilt bereits zwischen vier aufeinanderfolgenden Potenzen einer Dyade eine lineare Gleichung, die als Cayley-Hamiltonsche Gleichung bezeichnet wird. Es erweist sich nämlich als möglich, aus den drei Gleichungen (121a), (121b), (120), welche die drei Invarianten Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} durch drei Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und deren Bilder $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ ausdrücken, mit Hilfe der Dyade Φ die Vektoren zu eliminieren.

Zu diesem Zweck beseitigt man in (121a), (121b) einen der drei Vektoren in analoger Weise, wie bei Einführung der dualen Dyade in (127a) der Vektor $\mathfrak{u}$ aus Φ_{III} entfernt wurde.

Zunächst bringt man die Gleichung (121a)

$$[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]\Phi_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{u} \cdot \Phi\, \mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} \cdot \Phi\, \mathfrak{w}] + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \cdot \Phi]$$

in die Form

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} \times \mathfrak{w}\,\Phi_{\mathrm{I}} = \mathfrak{u} \cdot \{\Phi \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) + \mathfrak{v} \cdot \Phi \times \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi)\}.$$

Da diese Gleichung für jeden Vektor $\mathfrak{u}$ besteht, gilt bei Weglassung des Faktors $\mathfrak{u}$ die Gleichung

$$\Phi_{\mathrm{I}}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) - \Phi \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) = \mathfrak{v} \cdot \Phi \times \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi). \quad (129\,\mathrm{a})$$

In derselben Weise bringt man die Gleichung (121 b)

$$[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]\Phi_{\mathrm{II}} = [\mathfrak{u}\;\mathfrak{v} \cdot \Phi\;\mathfrak{w} \cdot \Phi] + [\mathfrak{u} \cdot \Phi\;\mathfrak{v}\;\mathfrak{w} \cdot \Phi] + [\mathfrak{u} \cdot \Phi\;\mathfrak{v} \cdot \Phi\;\mathfrak{w}]$$

in die Form

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} \times \mathfrak{w}\Phi_{\mathrm{II}} = \mathfrak{u} \cdot \{(\mathfrak{v} \cdot \Phi) \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi) + \Phi \cdot (\mathfrak{v} \times [\mathfrak{w} \cdot \Phi]) + \Phi \cdot (\mathfrak{v} \cdot \Phi \times \mathfrak{w})\}$$

und erhält hieraus wie oben

$$\Phi_{\mathrm{II}}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) - (\mathfrak{v} \cdot \Phi) \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi) = \Phi \cdot \{\mathfrak{v} \cdot \Phi \times \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi)\}. \quad (129\,\mathrm{b})$$

Die rechte Seite von (129a) tritt in der rechten Seite von (129b) als Faktor von Φ auf; durch Elimination folgt:

$$\Phi_{\mathrm{II}}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) - (\mathfrak{v} \cdot \Phi) \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi) = \Phi_{\mathrm{I}}\Phi \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) - \Phi^2 \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}). \quad (130)$$

Diese Gleichung verbindet man mit (127a)

$$(\mathfrak{v} \cdot \Phi) \times (\mathfrak{w} \cdot \Phi) = \Phi_{\mathrm{III}}\Phi^{-1} \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{w})$$

und erhält nach Weglassung des Faktors $\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}$:

$$\Phi_{\mathrm{II}}I - \Phi_{\mathrm{III}}\Phi^{-1} = \Phi_{\mathrm{I}}\Phi - \Phi^2.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit Φ folgt die Cayley-Hamiltonsche Gleichung:

$$\Phi^3 - \Phi_{\mathrm{I}}\Phi^2 + \Phi_{\mathrm{II}}\Phi - \Phi_{\mathrm{III}}I = 0 \quad (131)$$

als lineare Beziehung zwischen $\Phi^0 = I$, Φ, Φ^2, Φ^3.

Durch Multiplikation mit Φ^n (für positive oder negative n) ergibt sich aus (131) eine lineare Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Potenzen von Φ. Damit kann man jede Potenz von Φ linear durch Φ^2, Φ, I ausdrücken. Hieraus folgt z. B., daß jede Invariante von Φ, die die Form $\Phi_\times \cdot \Phi^n \cdot \Phi_\times$ besitzt, linear durch die drei in Ziffer 160 genannten Invarianten $\Phi_\times \cdot \Phi^2 \cdot \Phi_\times$, $\Phi_\times \cdot \Phi \cdot \Phi_\times$, $\Phi_\times \cdot \Phi_\times$ ausgedrückt werden kann.

167. Die Wurzeln der Cayley-Hamiltonschen Gleichung. Die Cayley-Hamiltonsche Gleichung (131) dient nicht zur Bestimmung der Dyade Φ durch Auflösung im Sinne der gewöhnlichen Algebra. Dagegen kann man aus den Wurzeln der ebenso gebildeten skalaren Gleichung [vgl. (100)]

$$\lambda^3 - \Phi_{\mathrm{I}}\lambda^2 + \Phi_{\mathrm{II}}\lambda - \Phi_{\mathrm{III}} = 0 \quad (132)$$

Schlüsse auf die Eigenschaften der Dyaden Φ ziehen, die der Cayleyschen Gleichung (131) genügen.

Man kann auf die Gleichung (132) durch die Aufgaben kommen. die Richtungen zu bestimmen, welche bei der durch eine Dyade Φ vermittelten affinen Abbildung

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

ungeändert bleiben. Für diese Richtungen gilt

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi = \lambda \mathfrak{r}, \tag{133}$$

wo der skalare Faktor λ den Maßstab der Dehnung in einer dieser Richtungen gibt. Bei Einführung von Koordinaten wird (133)

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z = \lambda x; \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = \lambda y; \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = \lambda z. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Hieraus folgt durch Elimination von x, y, z für λ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist die Gleichung (132).

Zu jeder der drei Wurzeln λ dieser Gleichung ergeben die Gleichungen (134) eine der drei festen Richtungen. Ist Φ eine symmetrische Dyade, so fallen diese drei Richtungen in die Hauptachsen der Tensorflächen. In diesem Fall ist die Bestimmung der invarianten Richtungen identisch mit dem Hauptachsenproblem der Flächen zweiten Grades.

Für die allgemeine Dyade stehen die drei festen Richtungen nicht aufeinander senkrecht.

Eine Dyade Φ, die die drei Vektoren $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch die lineare Transformation

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

in die drei gleichgerichteten Vektoren $\mathfrak{r}' = a\mathfrak{a}, b\mathfrak{b}, c\mathfrak{c}$ überführt, kann in der Form (124)

$$\Phi = a\,\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + b\,\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + c\,\mathfrak{c}^*\mathfrak{c} \tag{135}$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$, $\mathfrak{c}^*$ das System der zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ reziproken Vektoren bilden. Man kann Φ in drei etwas einfacher gebildete Faktoren von gleicher Art zerlegen: (136)

$$\Phi = (a\,\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + b\,\mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + c\,\mathfrak{c}^*\mathfrak{c}).$$

Die durch den ersten Faktor $a\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{c}^*\mathfrak{c}$ vermittelte Affinität läßt die Ebene $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ ungeändert und führt den Vektor $\mathfrak{a}$ in $a\mathfrak{a}$ über. Diese sonst als schiefe Affinität bezeichnete Trans-

formation soll hier als einfache Streckung bezeichnet werden. Der Raum wird von der Ebene ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) aus in der Richtung $\mathfrak{a}$ im Maßstab a gestreckt.

Ein besonderer Fall der einfachen Streckung, in welchem die Streckungsrichtung $\mathfrak{a}$ auf der Ebene ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) senkrecht steht, wurde früher als einfache Dehnung bezeichnet (Ziff. 145). Die einfache Dehnung wird durch eine spezielle symmetrische Dyade vermittelt. Die durch eine allgemeine symmetrische Dyade vermittelte Affinität, die reine Dehnung, läßt sich aus drei einfachen Dehnungen nach drei zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen.

Ebenso läßt sich die durch eine allgemeine Dyade vermittelte Affinität aus drei einfachen Streckungen nach drei im allgemeinen nicht zueinander senkrechten Richtungen zerlegen.

Es darf nicht übersehen werden, daß nicht notwendig alle drei Streckungsrichtungen reell sein müssen. Wenn zwei Wurzeln der Cayleyschen Gleichung konjugiert komplex sind, bleibt nur eine Streckungsrichtung reell. Ein Beispiel hierfür ist die Drehung um eine Achse. Die Achsenrichtung selbst ist die einzige reelle Streckungsrichtung; der Maßstab der Streckung (in diesem einfachen Fall einer Dehnung) ist Eins.

Das Auftreten einer Doppelwurzel der Cayley-Hamiltonschen Gleichung drückt im allgemeinen nicht das Zusammenfallen zweier invarianter Richtungen aus, sondern die Gleichheit des Maßstabes in zwei invarianten Richtungen und damit in der ganzen, durch diese Richtungen bestimmten Ebene. Zu diesen Transformationen gehört die einfache Streckung von einer Ebene aus, ferner die Scherung längs einer Ebene; bei letzterer besitzt die Cayleysche Gleichung eine dreifache Wurzel. Das gleiche gilt für die Streckung von einem Punkt aus (Ähnlichkeit) und für die Identität.

168. Ausartungen der Cayley-Hamiltonschen Gleichung. Für planare Dyaden, die durch das Verschwinden von Φ_{III} charakterisiert sind, reduziert sich die Cayley-Hamiltonsche Gleichung auf

$$\Phi^3 - \Phi_I \Phi^2 + \Phi_{II} \Phi = 0;$$

sie besitzt eine Wurzel Null, kann aber nicht auf eine Gleichung 2. Grades reduziert werden, da die planare Dyade keinen reziproken Wert besitzt, also eine Division ausgeschlossen ist.

Für lineare Dyaden verschwinden Φ_{III} und Φ_{II} gleichzeitig; die Cayley-Hamiltonsche Gleichung besitzt dann eine Doppelwurzel Null.

Endlich kann es vorkommen, daß die Cayley-Hamiltonsche Gleichung reduzibel ist, also eine Dyade einer Gleichung zweiten oder ersten Grades genügt. So genügt die Umklappung [Ziff. 149 (78)]

$$\Psi = 2\mathfrak{k}\mathfrak{k} - I = -\mathfrak{i}\mathfrak{i} - \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

offenbar der Gleichung

$$\Psi^2 - I = 0.$$

Die Invarianten von Ψ sind:

$$\Psi_{\mathrm{I}} = -1, \quad \Psi_{\mathrm{II}} = -1, \quad \Psi_{\mathrm{III}} = +1;$$

die zugehörige Cayley-Hamiltonsche Gleichung

$$\Psi^3 + \Psi^2 - \Psi - I = 0$$

kann in

$$(\Psi^2 - I)\cdot(\Psi + I) = 0$$

zerlegt werden; die Umklappung Ψ genügt bereits der durch Nullsetzen des ersten Faktors entstehenden Gleichung.

Die Maßstäbe der festen Richtungen ergeben sich aus der Gleichung 3. Grades

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Die einfache Wurzel $\lambda = +1$ entspricht der Umklappungsachse, die Doppelwurzel $\lambda = -1$ jeder darauf senkrechten Richtung.

Kapitel 5. Die wichtigsten Dyaden der Mechanik.

§ 1. Trägheitsdyade und Kreiselbewegung.

169. Bewegung eines starren Körpers. Um die Bewegung eines starren Körpers zu untersuchen, denkt man sich den starren Körper ersetzt durch ein System von Massenpunkten, deren gegenseitige Abstände unveränderlich sind. In einem solchen Punkthaufen werden innere Kräfte auftreten, die in die Verbindungslinien je zweier Punkte fallen; und zwar treten nach dem Reaktionsgesetz in jeder Verbindungslinie zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte auf. Es verschwindet die Summe aller inneren Kräfte und die Summe ihrer Momente; also treffen die für die Bewegung eines Punkthaufens (Ziff. 65, 66) gemachten Voraussetzungen zu.

Für die Bewegung eines derartigen starren Punkthaufens gilt der Schwerpunktssatz:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{1a}$$

und der allgemeine Flächensatz

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{1b}$$

letzerer sowohl für einen beliebigen festen Momentenpunkt als auch für den bewegten Schwerpunkt als Momentenpunkt.

In (1a), (1b) bedeuten:

$\mathfrak{K}$ die Resultierende der äußeren Kräfte,

$\mathfrak{M}$ das resultierende Moment der äußeren Kräfte,

$\mathfrak{J}$ den Impuls des Systems von Massenpunkten,

$\mathfrak{L}$ das Impulsmoment oder den Drall des Systems.

Zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers, der aus dem starren Punkthaufen durch Grenzübergang erhalten wird, genügt es, die Bewegung eines Punktes des starren Körpers und die relative Drehung des starren Körpers um diesen Punkt zu beschreiben.

Wenn von dem starren Körper ein Punkt festgehalten wird, so fällt der erste Teil der Aufgabe weg. Ist der starre Körper dagegen frei beweglich, so untersucht man die Bewegung seines Schwerpunkts und die Drehung um den Schwerpunkt. Die Bewegung des Schwerpunkts ergibt sich durch Integration der Gleichung (1a), die bei Einführung des Ortsvektors $\mathfrak{r}_0$ des Schwerpunkts und der Masse M des starren Körpers die Form

$$M\frac{d^2 \mathfrak{r}_0}{dt^2} = \mathfrak{K}$$

annimmt. Die Integration dieser Gleichung ist ein Problem der Dynamik eines Massenpunktes (Ziff. 64). Es bleibt also noch die Drehung um einen Punkt zu untersuchen, wozu die Gleichung (1b) genügt, wie Ziff. 175 bis 178 genauer gezeigt wird. Dasselbe ergibt schon jetzt eine vorläufige Überlegung: Ein frei beweglicher starrer Körper besitzt 6 Freiheitsgrade; das Gleichungssystem (1a, b) ist 6 skalaren Gleichungen gleichwertig und infolgedessen ausreichend zur Beschreibung der Bewegung eines Systems von 6 Freiheitsgraden.

Die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt wird als Kreiselbewegung bezeichnet.

170. Trägheitsmoment und Trägheitsdyade. Wenn sich ein starrer Körper um einen festen Punkt O dreht, ist seine Momentanbewegung eine Drehung um eine durch O gehende Achse. Die Drehgeschwindigkeit ist nach Betrag und Richtung durch den Vektor

$$\mathfrak{u} = u\mathfrak{e} \quad (|\mathfrak{u}| = u; \quad |\mathfrak{e}| = 1)$$

gegeben. Ein Punkt P des starren Körpers ist durch den von O nach P führenden Ortsvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt. (Vgl. Fig. 14, S. 21.)

Die Geschwindigkeit des Punktes P zufolge der momentanen Drehung ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}.$$

Die lebendige Kraft des starren Körpers ist

$$T = \frac{1}{2} Smv^2, \quad (|\mathfrak{v}| = v), \tag{2}$$

wo das Summenzeichen S eine Summation über eine kontinuierliche Massenverteilung andeutet.

Bezeichnet man mit ϱ den Abstand des Punktes P von der Drehachse, so ist

$$v = u\varrho$$

und

$$T = \frac{1}{2} u^2 Sm\varrho^2. \tag{2'}$$

Man bezeichnet

$$Sm\varrho^2 = \Theta \tag{3}$$

als das **Trägheitsmoment des starren Körpers** um die Momentanachse und erhält bei seiner Verwendung

$$T = \frac{1}{2} u^2 \Theta. \tag{4}$$

Um die Abhängigkeit des Trägheitsmoments von der Richtung der Drehachse zu finden, formen wir zunächst den Ausdruck (2) für die lebendige Kraft um:

$$T = \frac{1}{2} Sm\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} = \frac{1}{2} Sm(\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}) \cdot (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}).$$

Die Entwicklung des vierfachen Produkts gibt (Ziff. 22)

$$T = \frac{1}{2} Sm(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} - \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u})$$

oder, wenn man

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \cdot I \cdot \mathfrak{u}$$

setzt:

$$T = \frac{1}{2} \mathfrak{u} \cdot Sm(r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{u}.$$

Man bezeichnet die massengeometrische Größe

$$Sm(r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) = \Phi \tag{5}$$

als **Trägheitsdyade des starren Körpers** und erhält für die **lebendige Kraft**:

$$T = \frac{1}{2} \mathfrak{u} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{u} = \frac{1}{2} u^2 \mathfrak{e} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{e}, \tag{6}$$

also nach (4) für das **Trägheitsmoment**:

$$\Theta = \mathfrak{e} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{e}. \tag{7}$$

Damit ist die gesuchte Abhängigkeit des Trägheitsmoments von der Richtung der Drehachse gefunden.

171. Einführung von Koordinaten. Bei Zugrundelegung eines Dreibeins als Basis wird die Trägheitsdyade (5)

$$\begin{aligned}\Phi &= Sm[(x^2 + y^2 + z^2)(\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}) - (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})] \\ &= Sm(y^2 + z^2)\mathfrak{i}\mathfrak{i} + Sm(x^2 + z^2)\mathfrak{j}\mathfrak{j} + Sm(x^2 + y^2)\mathfrak{k}\mathfrak{k} \\ &\quad - Smyz(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}) - Smxz(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}) - Smxy(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i})\end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$\begin{aligned}\Phi = \Theta_x \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \Theta_y \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \Theta_z \mathfrak{k}\mathfrak{k} \\ - \Theta_{yz}(\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}) - \Theta_{xz}(\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}) - \Theta_{xy}(\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}).\end{aligned} \tag{8}$$

Θ_x, Θ_y, Θ_z sind die Trägheitsmomente um die Achsen des Koordinatensystems; Θ_{yz}, Θ_{xz}, Θ_{xy} heißen die Deviationsmomente.

Das Trägheitsmoment Θ um eine beliebige Achse, die durch den Einheitsvektor ihrer Richtung

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\cos\beta + \mathfrak{k}\cos\gamma$$

bestimmt ist, wird nun nach (7) in folgender Weise ausgedrückt:

$$\Theta = \Theta_x \cos^2\alpha + \Theta_y \cos^2\beta + \Theta_z \cos^2\gamma$$
$$- 2\Theta_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\Theta_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2\Theta_{xy}\cos\alpha\cos\beta.$$

Die Trägheitsdyade ist nach (5) oder (8) eine symmetrische Dyade; es gibt also ein ausgezeichnetes Dreibein, auf das bezogen sie die Form

$$\Phi = \Theta_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \Theta_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \Theta_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k} \tag{9}$$

annimmt. Θ_1, Θ_2, Θ_3 heißen die Hauptträgheitsmomente; die zugehörigen Deviationsmomente verschwinden. Die Richtungen des Dreibeins $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ heißen die Hauptträgheitsachsen.

172. Trägheitsellipsoid. Trägt man die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ als Ortsvektor auf, so gibt die Gleichung (5)

$$2T = \mathfrak{u}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{u} \tag{10}$$

für konstante Werte von T die Schar der Tensorflächen der Trägheitsdyade; sie sind Ellipsoide und werden als Trägheitsellipsoide bezeichnet. Eines von ihnen, das dem Wert $2T = 1$ zugehört, heißt das Cauchy-Poinsotsche Trägheitsellipsoid:

$$\mathfrak{u}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{u} = 1. \tag{10'}$$

Jeder Halbmesser dieses Ellipsoids bestimmt nach (4) das Trägheitsmoment um die in seine Richtung fallende Achse:

$$\Theta = \frac{1}{u^2}. \tag{11}$$

Bezogen auf ein Dreibein als Basis soll der Vektor der Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = u_x\mathfrak{i} + u_y\mathfrak{j} + u_z\mathfrak{k}$$

gesetzt werden. Führt man das ausgezeichnete Dreibein ein, so wird das Cauchy-Poinsotsche Trägheitsellipsoid nach (9)

$$\Theta_1 u_x^2 + \Theta_2 u_y^2 + \Theta_3 u_z^2 = 1; \tag{12a}$$

seine Halbachsen sind $\frac{1}{\sqrt{\Theta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\Theta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\Theta_3}}$. Man bezeichnet als Hauptdrehgeschwindigkeiten u_1, u_2, u_3 die Geschwindigkeiten, mit denen

sich der starre Körper bei der lebendigen Kraft $2T = 1$ um eine der Hauptträgheitsachsen dreht; sie ergeben sich aus

$$\Theta_1 = \frac{1}{u_1^2}, \quad \Theta_2 = \frac{1}{u_2^2}, \quad \Theta_3 = \frac{1}{u_3^2};$$

mit ihrer Hilfe läßt sich das Cauchy-Poinsotsche Trägheitsellipsoid durch die Gleichung

$$\frac{u_x^2}{u_1^2} + \frac{u_y^2}{u_2^2} + \frac{u_z^2}{u_3^2} = 1 \tag{12b}$$

geben.

173. Drall und Drallellipsoid. Der Drall eines starren Körpers ist

$$\mathfrak{L} = S\mathfrak{r} \times m\mathfrak{v} = Sm\mathfrak{r} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}).$$

Nach dem Entwicklungssatz erhält man

$$\mathfrak{L} = Sm(r^2\mathfrak{u} - \mathfrak{r}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}) = Sm(r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{u}$$

oder unter Einführung der Bezeichnung Φ für die Trägheitsdyade (5)

$$\mathfrak{L} = \Phi \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \cdot \Phi. \tag{13}$$

Der Drall ist eine lineare Vektorfunktion der Drehgeschwindigkeit. Er fällt nach Ziff. 142 in die Normalenrichtung des Trägheitsellipsoids im Endpunkt von $\mathfrak{u}$. Nach Betrag und Richtung ist er durch den Gradienten des Feldes der Tensorflächen der Trägheitsdyade bestimmt:

$$\mathfrak{L} = \operatorname{grad} T. \tag{14}$$

Zwischen der Drehgeschwindigkeit und dem Drall besteht wegen der Gleichung (10) der Trägheitsellipsoide

$$\mathfrak{u} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{u} = 2T$$

nach (13) die Beziehung

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{u} = 2T. \tag{15}$$

Trägt man die zu den Ortsvektoren $\mathfrak{u}$ eines Trägheitsellipsoids gehörigen Drallvektoren $\mathfrak{L}$ als Ortsvektoren auf, so erfüllen ihre Endpunkte das reziproke Tensorellipsoid oder Drallellipsoid:

$$\mathfrak{L} \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{L} = 2T. \tag{16}$$

Eines von den Drallellipsoiden, das der lebendigen Kraft $2T = 1$ zugehört, wird als Mac Cullaghsches Drallellipsoid bezeichnet:

$$\mathfrak{L} \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{L} = 1. \tag{16'}$$

Bei Einführung eines Koordinatensystems zerfällt der Drall in Komponenten:

$$\mathfrak{L} = L_x \mathfrak{i} + L_y \mathfrak{j} + L_z \mathfrak{k};$$

legt man das ausgezeichnete Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen zugrunde, so wird nach (13)

$$L_x = \Theta_1 u_x, \quad L_y = \Theta_2 u_y, \quad L_z = \Theta_3 u_z. \tag{17}$$

Dann wird die Gleichung des Mac Cullaghschen Drallellipsoids

$$\frac{L_x^2}{\Theta_1} + \frac{L_y^2}{\Theta_2} + \frac{L_z^2}{\Theta_3} = 1. \tag{18a}$$

Bei einer Drehung um eine der Hauptachsen fällt der Drall in die Achse der Drehung. Man bezeichnet die zugehörigen Werte des Dralls als seine Hauptwerte L_1, L_2, L_3. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Gleichung des Drallellipsoids in die Form

$$\frac{L_x^2}{L_1^2} + \frac{L_y^2}{L_2^2} + \frac{L_z^2}{L_3^2} = 1 \tag{18b}$$

bringen.

174. Kräftefreier Kreisel. Bei der Bewegung eines kräftefreien Kreisels, d. h. bei der kräftefreien Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt (z. B. bei der Drehung eines schweren Körpers um seinen Schwerpunkt), bleibt die lebendige Kraft konstant. Infolgedessen bewegt sich der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{u}$ dauernd auf einem Trägheitsellipsoid (10)

$$\mathfrak{u} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{u} = 2T.$$

Aus dem allgemeinen Flächensatz (1b)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}$$

folgt für die kräftefreie Bewegung, also für $\mathfrak{M} = 0$, daß $\mathfrak{L}$ ein nach Betrag und Richtung im Raum konstanter Vektor ist. Im bewegten Körper kann sein Endpunkt nur auf einer Kugel liegen, deren Radius der Betrag $L = |\mathfrak{L}|$ des Dralls ist. Der Schnitt dieser Kugel

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L} = L^2 \tag{19}$$

mit dem Drallellipsoid (16)

$$\mathfrak{L} \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{L} = 2T$$

gibt die Bahn, die der Endpunkt des Drallvektors im Körper bei der Drehung durchläuft.

Die Bahn des Endpunkts des Geschwindigkeitsvektors im Körper (Polhodie) liegt außer auf dem Trägheitsellipsoid (10) noch auf dem reziproken Maßellipsoid

$$\mathfrak{u} \cdot \Phi^2 \cdot \mathfrak{u} = L^2, \tag{20}$$

in welches die Kugel des konstanten Dralls (19) durch die lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{u} = \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{L}$$

übergeführt wird. Die im Körper feste Polkurve ist die Raumkurve 4. Ordnung, in der sich das Trägheitsellipsoid (10) und das reziproke Maßellipsoid (20) schneiden. Der zugehörige Polkegel, dessen Mantellinien der Drehvektor $\mathfrak{u}$ durchläuft, ist ein Kegel zweiter Ordnung.

Das Trägheitsellipsoid, der Ort des Endpunktes des Vektors $\mathfrak{u}$, und das Drallellipsoid, der Ort des Endpunktes des Vektors $\mathfrak{L}$, sind reziproke Tensorellipsoide (vgl. Ziff. 143). Daher steht die Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid im Endpunkt von $\mathfrak{u}$ dauernd auf dem zugehörigen Drall $\mathfrak{L}$ senkrecht. Da $\mathfrak{L}$ eine feste Richtung im Raum besitzt, hat auch die Tangentialebene eine feste Stellung im Raum.

Da $\mathfrak{L}$ auch einen konstanten Betrag L besitzt, folgt aus

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{u} = 2\,T,$$

daß der Abstand der Tangentialebene des Trägheitsellipsoids vom Mittelpunkt konstant ist.

Das Trägheitsellipsoid berührt also dauernd eine feste Ebene, die invariable Ebene. Dabei dreht es sich um eine Gerade, die durch den Berührpunkt geht; d. h. es rollt bei festgehaltenem Mittelpunkt auf der invariablen Ebene. Damit ist die kräftefreie Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt kinematisch auf die Rollbewegung eines Ellipsoids, dessen Mittelpunkt festgehalten wird, auf einer festen Ebene zurückgeführt (Poinsot-Bewegung).

175. Hauptgleichung der Kreiselbewegung. Für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, die Kreiselbewegung, gilt, wenn die äußeren Kräfte ein Moment $\mathfrak{M}$ besitzen, die Gleichung (1b)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}. \tag{21}$$

Wegen (13)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{u} \cdot \Phi$$

ist

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{u}}{dt} \cdot \Phi + \mathfrak{u} \cdot \frac{d\Phi}{dt}. \tag{22}$$

Die Dyade Φ ist eine im Körper feste Dyade. Jede im Körper feste Dyade kann in die Form

$$\Phi = \sum \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ im Körper feste Vektoren bedeuten. Dann ist

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Sigma\left(\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dt}\mathfrak{B}_\nu + \mathfrak{A}_\nu\frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dt}\right).$$

Die Änderung der Vektoren $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ im Raum ist durch die Drehung des Körpers bedingt; es ist für jeden im Körper festen Vektor $\mathfrak{v}$

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v} = -\mathfrak{v} \times \mathfrak{u},$$

also

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Sigma(\mathfrak{u} \times \mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\nu - \mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\nu \times \mathfrak{u})$$

oder

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathfrak{u} \times \Phi - \Phi \times \mathfrak{u}. \tag{23}$$

Somit wird nach (22), wenn man bemerkt, daß $\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u} \times \Phi$ verschwindet:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{u}}{dt}\cdot\Phi - \mathfrak{u}\cdot\Phi \times \mathfrak{u}.$$

Die Bewegungsgleichung des Kreisels (21) wird

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\cdot\Phi - \mathfrak{u}\cdot\Phi \times \mathfrak{u} = \mathfrak{M}. \tag{24}$$

Diese Gleichung soll als Hauptgleichung der Kreiselbewegung bezeichnet werden.

176. Moment der Zentrifugalkraft. Die in der Hauptgleichung (24) der Kreiselbewegung auftretenden Glieder lassen eine einfache Deutung zu, wenn man die Theorie der Relativbewegung heranzieht (Ziff. 69, 70). Schreibt man die Hauptgleichung in der Form

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\cdot\Phi = \mathfrak{M} + \mathfrak{u}\cdot\Phi \times \mathfrak{u},$$

so ist

$\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\cdot\Phi$ der Differentialquotient des Dralls bei festgehaltenem Φ, also seine Änderung im bewegten System,

$\mathfrak{M}$ das Moment der äußeren Kräfte,

$\mathfrak{u}\cdot\Phi \times \mathfrak{u}$ das Moment der Zentrifugalkraft, wie zu beweisen sein wird:

Die Zentripetalbeschleunigung eines Punktes des bewegten Körpers ist $\mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r})$, das resultierende Moment der Zentrifugalkraft ist also

$$\mathfrak{M}_Z = -Sm\mathfrak{r} \times [\mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r})].$$

Nach dem Entwicklungssatz erhält man:

$$\mathfrak{M}_Z = -Sm\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{r}\mathfrak{r} \times \mathfrak{u}.$$

Anderseits ist

$$\mathfrak{u} \cdot \Phi \times \mathfrak{u} = S m \mathfrak{u} \cdot (r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) \times \mathfrak{u} = -S m \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{r} \times \mathfrak{u}$$

oder

$$\mathfrak{u} \cdot \Phi \times \mathfrak{u} = \mathfrak{M}_Z, \tag{25}$$

womit der Beweis erbracht ist.

Man kann also die Hauptgleichung im bewegten System auf die Form

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \mathfrak{M}' \tag{26}$$

bringen, wobei unter $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$ der Differentialquotient des Dralls im bewegten System verstanden ist und sich das Moment $\mathfrak{M}'$ aus dem Moment der äußeren Kräfte und dem Moment der Zentrifugalkraft zusammensetzt.

177. Eulersche Gleichungen der Kreiselbewegung. Um aus der Hauptgleichung ein System von skalaren Bewegungsgleichungen abzuleiten, kann man ein im Raum festes oder ein im Körper festes Koordinatensystem zugrunde legen. Beides kann Vorteile haben. Denn die Trägheitsdyade Φ ist eine im bewegten Körper konstante und gegebene Größe; dagegen ist das Moment $\mathfrak{M}$ im allgemeinen im festen Raum gegeben. Jedenfalls enthalten die Größen Φ und $\mathfrak{M}$, die in der Hauptgleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{u}$ dienen, noch die Winkel, von denen die Lage des bewegten Systems gegenüber dem festen abhängt.

Im folgenden soll ein im Körper festes Koordinatensystem x, y, z mit dem zugehörigen Dreibein $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ zugrunde gelegt werden. Legt man speziell die Achsen des Koordinatensystems in die Hauptträgheitsachsen, so erhält man die „Eulerschen Gleichungen" der Kreiselbewegung in der gewöhnlichen Form:

$$\begin{aligned} \frac{d u_x}{dt} \Theta_1 + u_y u_z (\Theta_3 - \Theta_2) &= M_x; \\ \frac{d u_y}{dt} \Theta_2 + u_x u_z (\Theta_1 - \Theta_3) &= M_y; \\ \frac{d u_z}{dt} \Theta_3 + u_x u_y (\Theta_2 - \Theta_1) &= M_z. \end{aligned} \tag{27}$$

Dazu hat man nur in der vektoriellen Hauptgleichung (24)

$$\begin{aligned} \Phi &= \Theta_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \Theta_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \Theta_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{u} &= u_x \mathfrak{i} + u_y \mathfrak{j} + u_z \mathfrak{k}, \\ \mathfrak{M} &= M_x \mathfrak{i} + M_y \mathfrak{j} + M_z \mathfrak{k} \end{aligned}$$

zu setzen.

Wählt man ein beliebiges, im Körper festes Koordinatensystem mit dem Scheitel im Drehpunkt, so hat man für Φ den allgemeinen Ausdruck (8) einzusetzen, in dem außer den Trägheitsmomenten auch die Deviationsmomente auftreten. Von den Bewegungsgleichungen wird die erste:

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt}\Theta_x - \frac{du_y}{dt}\Theta_{xy} - \frac{du_z}{dt}\Theta_{xz} + u_y u_z(\Theta_z - \Theta_y)\\ + (u_z^2 - u_y^2)\Theta_{yz} - u_x u_y \Theta_{xz} + u_x u_z \Theta_{xy} = M_x;\end{aligned} \tag{27'}$$

daraus folgen die zweite und dritte durch zyklische Vertauschung.

178. Einführung der Eulerschen Winkel. In den Eulerschen Gleichungen (27) bzw. (27') kann die Abhängigkeit der Größen M_x, M_y, M_z von der augenblicklichen Lage des bewegten Systems gegenüber dem festen, etwa durch die drei Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ (Ziff. 11) bestimmt werden, die selbst als Funktionen der Zeit zu betrachten sind. Nur bei kräftefreier Bewegung, also für

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

bilden die Eulerschen Gleichungen ein für sich integrables System. Aber auch in diesem einfachsten Fall genügen sie nur zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{u}$ der Drehgeschwindigkeit im bewegten System, also des Polhodiekegels. Um die Bewegung des Kreisels vollständig beschreiben zu können, braucht man noch die Bewegung des bewegten Systems gegenüber dem festen; dann kann man die Bewegung des Vektors $\mathfrak{u}$ gegenüber dem festen System, also den Herpolhodiekegel, bestimmen.

Das Koordinatensystem im festen System soll mit x_0, y_0, z_0, das zugehörige Dreibein mit $\mathfrak{i}_0$, $\mathfrak{j}_0$, $\mathfrak{k}_0$ bezeichnet werden (Fig. 68). Die xy-Ebene des bewegten Systems schneide die x_0y_0-Ebene des festen unter dem Neigungswinkel ϑ in der „Knotenlinie“ k mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{t}$; die Knotenlinie bilde mit der x_0-Achse den Winkel φ; die x-Achse mit der Knotenlinie den Winkel ψ. Bei Drehungen um die Achsen k, z_0, z mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}$ ändern sich jeweils nur die Winkel ϑ, φ, ψ; die Maßzahlen der zugehörigen Drehgeschwindigkeiten seien $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$. Durch Zusammensetzung dreier derartiger Drehgeschwindigkeiten erhält man eine allgemeine Drehgeschwindigkeit; und umgekehrt läßt sich jede Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in Komponenten nach den Achsen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}$ zerlegen:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t}\frac{d\vartheta}{dt} + \mathfrak{k}_0\frac{d\varphi}{dt} + \mathfrak{k}\frac{d\psi}{dt}\,. \tag{28}$$

Anderseits ist im bewegten System

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} u_x + \mathfrak{j} u_y + \mathfrak{k} u_z.$$

Durch Vergleich mit (28) kann man u_x, u_y, u_z durch die Bestimmungsstücke der Drehung beider Systeme gegeneinander aus-

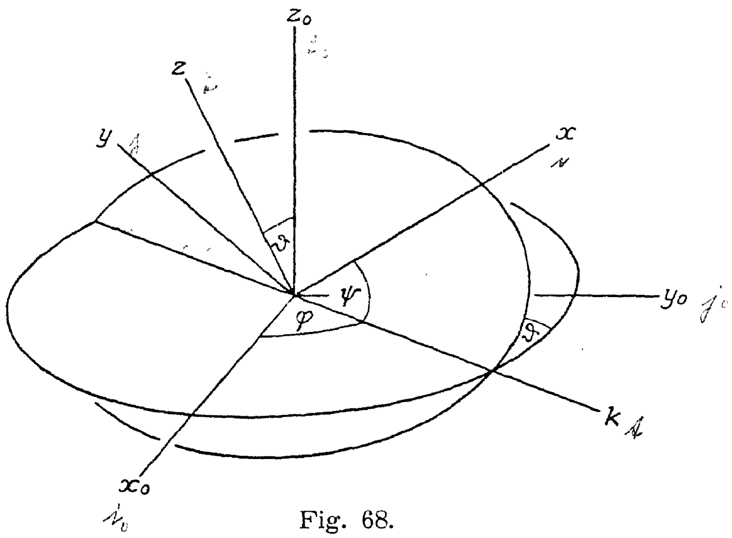


Fig. 68.

drücken, wenn es gelingt, an Stelle von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}$ in (28) $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ einzuführen. Nun ist aber (vgl. Fig. 68)

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{i} \cos\psi - \mathfrak{j} \sin\psi;$$

außerdem nach Ziff. 11 (26′) mit leichter Änderung der Bezeichnung

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{i} \sin\psi \sin\vartheta + \mathfrak{j} \cos\psi \sin\vartheta + \mathfrak{k} \cos\vartheta;$$

also

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{i} \cos\psi - \mathfrak{j} \sin\psi) \frac{d\vartheta}{dt} + \mathfrak{k} \frac{d\psi}{dt}$$
$$+ (\mathfrak{i} \sin\psi \sin\vartheta + \mathfrak{j} \cos\psi \sin\vartheta + \mathfrak{k} \cos\vartheta) \frac{d\varphi}{dt}.$$

Hieraus folgt für die **Maßzahlen von $\mathfrak{u}$ im bewegten System**:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos\psi \frac{d\vartheta}{dt} + \sin\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt}; \\ u_y &= -\sin\psi \frac{d\vartheta}{dt} + \cos\psi \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt}; \\ u_z &= \cos\vartheta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \tag{29}$$

Das System (28) bildet zusammen mit (27) oder (27′) ein simultanes System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den

6 von t abhängigen Veränderlichen u_x, u_y, u_z, ϑ, φ, ψ. Sie bestimmen diese 6 Veränderlichen durch ihre Anfangswerte; oder sie bestimmen, bei Elimination von drei Veränderlichen, die drei anderen durch ihre Anfangswerte und die Anfangswerte der zugehörigen Geschwindigkeiten.

179. Feld der Trägheitsdyade. Bisher wurde die Trägheitsdyade einer Massenverteilung stets für einen zwar beliebigen, aber festen Punkt berechnet. Wenn man die Trägheitsdyade für beliebigen Aufpunkt als Funktion des Ortes betrachtet, so bildet die Gesamtheit ihrer den Punkten des Raumes zugeordneten Werte das Feld der Trägheitsdyade.

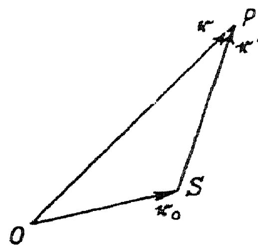


Fig. 69.

Die Trägheitsdyade Φ für einen beliebigen Aufpunkt O drückt sich am einfachsten aus, wenn man die Trägheitsdyade Φ' für den Schwerpunkt S einführt. Der Ortsvektor eines Massenpunktes P für den Anfangspunkt O soll mit $\mathfrak{r}$, für den Anfangspunkt S mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnet werden. Der Ortsvektor des Schwerpunkts für den Anfangspunkt O sei $\mathfrak{r}_0$. Dann ist (Fig. 69)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}'$$

und

$$S m \mathfrak{r}' = 0. \tag{30}$$

Die Trägheitsdyade Φ wird

$$\begin{aligned}\Phi &= Sm(r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r})\\ &= Sm(r_0^2 I - \mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0) + Sm(2\,\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{r}' I - \mathfrak{r}_0\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'\mathfrak{r}_0) + Sm(r'^2 I - \mathfrak{r}'\mathfrak{r}').\end{aligned}$$

Wegen (30) verschwindet die mittlere Summe. Es wird

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi', \tag{31}$$

wo

$$\Phi' = Sm(r'^2 I - \mathfrak{r}'\mathfrak{r}')$$

die Trägheitsdyade für den Schwerpunkt als Aufpunkt ist,

$$\Phi_0 = M(r_0^2 I - \mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_0)$$

die Trägheitsdyade der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse M für den Punkt O als Aufpunkt oder auch die Trägheitsdyade der in O vereinigt gedachten Masse M für den Schwerpunkt als Aufpunkt.

Bezieht man Φ auf ein Dreibein, das in die Hauptträgheitsachsen im Schwerpunkt fällt, und bezeichnet mit Θ_1', Θ_2', Θ_3' die Trägheitsmomente für diese Achsen, so wird

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \Theta_1'\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \Theta_2'\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \Theta_3'\mathfrak{k}\mathfrak{k}\\ & + M[(y^2+z^2)\mathfrak{i}\mathfrak{i} + (x^2+z^2)\mathfrak{j}\mathfrak{j} + (x^2+y^2)\mathfrak{k}\mathfrak{k}\\ & - yz(\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\mathfrak{j}) - xz(\mathfrak{i}\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\mathfrak{i}) - xy(\mathfrak{i}\mathfrak{j}+\mathfrak{j}\mathfrak{i})];\end{aligned} \tag{31'}$$

x, y, z sind dabei die Koordinaten des variablen Aufpunkts O, für den die Trägheitsdyade Φ als Feldgröße berechnet ist.

Zu sämtlichen möglichen Massenverteilungen im Raum gehören, abgesehen von der Lage, nur ∞^4-Trägheitsdyadenfelder; denn die vier Größen M, Θ_1', Θ_2', Θ_3' einer Massenverteilung bestimmen das Feld der Trägheitsdyade.

Das Trägheitsmoment für eine beliebige durch O gehende Achse mit der Richtung $\mathfrak{e}$ ist (nach 7)

$$\mathfrak{e}\cdot\Phi\cdot\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\cdot\Phi_0\cdot\mathfrak{e} + \mathfrak{e}\cdot\Phi'\cdot\mathfrak{e}$$

oder

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta'. \tag{32}$$

Das Trägheitsmoment Θ um die durch O gehende Achse setzt sich also additiv zusammen aus dem Trägheitsmoment Θ' um die parallele Achse durch den Schwerpunkt und dem Trägheitsmoment Θ_0 der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse M um die Achse durch O (Steinerscher Satz).

180. Der Komplex der Hauptträgheitsachsen. In jedem Punkt O des Trägheitsdyadenfeldes gibt es drei Hauptträgheitsachsen, die dadurch charakterisiert werden können, daß der Drall in die Richtung der zugehörigen Drehachse fällt. Die Bedingung dafür ist

$$\mathfrak{L} \times \mathfrak{u} = 0$$

oder

$$\mathfrak{u}\cdot\Phi \times \mathfrak{u} = 0. \tag{33}$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{r}$ statt mit $-\mathfrak{r}_0$ den vom Schwerpunkt ausgehenden Ortsvektor O, so ist nach (31)

$$\Phi = \Phi' + M(r^2 I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}).$$

Damit nimmt die Bestimmungsgleichung (33) der Hauptträgheitsachsen folgende Form an:

$$\mathfrak{u}\cdot[\Phi' - M\mathfrak{r}\mathfrak{r}] \times \mathfrak{u} = 0. \tag{33'}$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, soll eine Schar von konfokalen Flächen zweiten Grades betrachtet werden. Zu diesen kann man auf folgende Weise kommen: Sind Ψ und X zwei symmetrische Dyaden, so ist

$$\mathfrak{r}\cdot(\Psi + \lambda X)\cdot\mathfrak{r} = 1$$

ein Büschel von Flächen zweiten Grades, der normierten Tensorflächen der Dyaden $\Psi + \lambda X$. Die reziproken Tensorflächen

$$\mathfrak{r}\cdot(\Psi + \lambda X)^{-1}\cdot\mathfrak{r} = 1$$

sind die Polarflächen der Flächen des Büschels bezüglich der Einheitskugel und bilden eine Schar von Flächen zweiten Grades.

Geht man speziell von dem Büschel

$$\mathfrak{r} \cdot (\Psi + \lambda I) \cdot \mathfrak{r} = 1$$

aus, das eine Nullkugel enthält, so wird die Schar der Polarflächen

$$\mathfrak{r} \cdot (\Psi + \lambda I)^{-1} \cdot \mathfrak{r} = 1 \tag{34}$$

als Schar von konfokalen Flächen zweiten Grades bezeichnet. Durch Übergang zu Koordinaten kommt man zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1, \tag{34'}$$

wenn

$$\Psi = a\mathfrak{i}\mathfrak{i} + b\mathfrak{j}\mathfrak{j} + c\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

gesetzt wird.

Man kann die Gleichung (34) bzw. (34′) als eine Gleichung dritten Grades auffassen, die jedem Punkt O mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ die drei Parameterwerte λ derjenigen Flächen der Schar zuordnet, die durch ihn hindurchgehen. Der Einheitsvektor der Normalen einer dieser Flächen ist nach Ziff. 144 (60′)

$$\mathfrak{N} = p\,\mathfrak{r} \cdot (\Psi + \lambda I)^{-1}, \tag{35}$$

wo p der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt ist. Will man die Normalenrichtungen der drei durch einen Punkt gehenden konfokalen Flächen als Funktion des Ortsvektors ausdrücken, so hat man aus (34) und (35) die Größen p und λ zu eliminieren. Dazu leitet man aus ihnen zwei neue Gleichungen her:

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{r} = p$$

und

$$\mathfrak{N} \cdot (\Psi + \lambda I) = p\,\mathfrak{r};$$

aus ihnen folgt:

$$\mathfrak{N} \cdot (\Psi + \lambda I - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) = 0$$

und durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{N}$ die gesuchte, von p und λ freie Gleichung

$$\mathfrak{N} \cdot (\Psi - \mathfrak{r}\mathfrak{r}) \times \mathfrak{N} = 0, \tag{36}$$

welche die Normalenrichtung im Punkt $\mathfrak{r}$ bestimmt.

Durch Vergleich von (33′) mit (36) erkennt man, daß die Hauptträgheitsachsen die Normalen einer Schar von konfokalen Flächen zweiten Grades sind, die man erhält, wenn man in (34) Ψ durch $\frac{\Phi'}{M}$ ersetzt. Eine von diesen Flächen, die dem Parameterwert $\lambda = 0$ entspricht:

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi^{-1} \cdot \mathfrak{r} = \frac{1}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{\Theta_1'} + \frac{y^2}{\Theta_2'} + \frac{z^2}{\Theta_3'} = \frac{1}{M}$$

ist ein *besonders normiertes Drallellipsoid*; es bestimmt das ganze konfokale System und damit den Komplex der Hauptträgheitsachsen.

§ 2. Infinitesimale Verzerrungen.[1])

181. Verrückung und Verzerrung. Wir betrachten eine Umgebung eines Punktes $P(\mathfrak{r})$ und bezeichnen mit $Q(\mathfrak{r} + d\mathfrak{r})$ einen beliebigen Punkt dieser Umgebung; dann ist $d\mathfrak{r}$ der von P ausgehende (relative) Ortsvektor eines Punktes Q (Fig. 70).

Wird der Punkt P durch eine *Verrückung* $\mathfrak{v}$ nach P', ein Punkt Q durch eine Verrückung $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ nach Q' gebracht, so ist der von P' ausgehende Ortsvektor von Q'

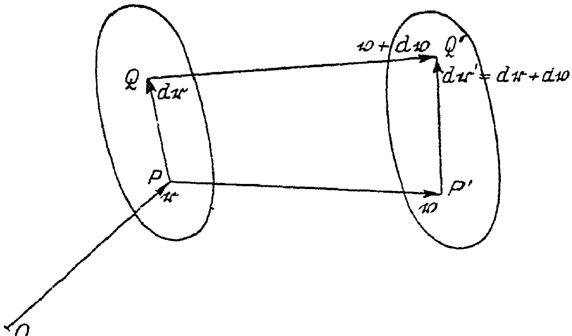


Fig. 70.

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{v}.$$

Wird so die Umgebung von P in die Umgebung von P' übergeführt, so erfährt sie dabei eine *Verzerrung*. Das Maß dieser Verzerrung nach Betrag und Richtung ist der Vektor $d\mathfrak{v}$, der in gleicher Weise als Unterschied der Verrückung eines Punktes der Umgebung von P gegenüber der Verrückung von P selbst, wie als Änderung des (relativen) Ortsvektors eines Punktes seiner Umgebung aufgefaßt werden kann.

Ist die *Verrückung* $\mathfrak{v}$ als eine in der Umgebung von P stetige vektorielle Ortsfunktion gegeben, so wird die *Verzerrung* $d\mathfrak{v}$ durch gerichtete Differentiation erhalten (Ziff. 77):

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{v}. \tag{37}$$

Die Umgebung des Punktes P wird in die Umgebung von P' affin abgebildet; der Bildvektor eines Ortsvektors $d\mathfrak{r}$ ist

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + d\mathfrak{r} \cdot \nabla \mathfrak{v} = d\mathfrak{r} \cdot (I + \nabla \mathfrak{v}). \tag{38}$$

Die Verzerrung der Umgebung von P ist völlig bestimmt durch die lokale Dyade $\nabla \mathfrak{v}$, die *Verzerrungsdyade*. Sie ist eine tensorielle Ortsfunktion und abhängig von dem Vektorfeld der Verrückung $\mathfrak{v}$; doch wird sie wenigstens in den nächsten Ziffern nur in der Umgebung eines festen Aufpunktes untersucht. —

1) §§ 2, 3, 4. Vgl. *Marcolongo*, Theoretische Mechanik II.

Die bisherigen Betrachtungen und die Gleichungen (37) und (38) gelten für endliche Verrückungen ebenso wie für infinitesimale; für die Mehrzahl der folgenden Formeln ist jedoch die Gültigkeit auf infinitesimale Verrückungen beschränkt, für alle diejenigen nämlich, bei deren Ableitung Glieder höherer Ordnung in $d\mathfrak{v}$ vernachlässigt werden.

182. Dilatation. Ein für die Analyse der Verzerrung sehr wichtiger Begriff ist die lineare Dilatation, d. h. die auf die Längeneinheit bezogene Längenänderung eines Ortsvektors $d\mathfrak{r} = \mathfrak{e}\,|d\mathfrak{r}|$ von beliebiger Richtung $\mathfrak{e}$ (Fig. 71), also die Größe

$$\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \frac{|d\mathfrak{r}'| - |d\mathfrak{r}|}{|d\mathfrak{r}|}.$$

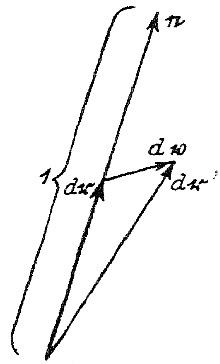


Fig. 71.

Bei infinitesimalen Verrückungen unterscheidet sich die Länge des Vektors $d\mathfrak{r}'$ von der Länge seiner Projektion auf $\mathfrak{e}$ nur um eine Größe zweiter Ordnung in $d\mathfrak{v}$; also ist bei Vernachlässigung dieser Größe

$$|d\mathfrak{r}'| = d\mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{e} = d\mathfrak{r} \cdot (I + \nabla \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{e} = |d\mathfrak{r}|\,(1 + \mathfrak{e} \cdot \nabla \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{e}); \qquad (39)$$

mithin ist die Dilatation in Richtung $\mathfrak{e}$

$$\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e} \cdot \nabla \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{e}. \qquad (40)$$

Jetzt ist es leicht, auch die Richtungsänderung zu bestimmen, die ein Vektor bei der Verzerrung erleidet; setzt man

$$d\mathfrak{r}' = \mathfrak{e}'\,|d\mathfrak{r}'|,$$

so kann (38) in die Form

$$\mathfrak{e}'\,|d\mathfrak{r}'| = \mathfrak{e}\,|d\mathfrak{r}| \cdot (I + \nabla \mathfrak{v})$$

gebracht werden; nach (39) und (40) ergibt sich der Einheitsvektor der transformierten Richtung aus

$$(1 + \varepsilon_{\mathfrak{e}})\,\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cdot (I + \nabla \mathfrak{v}). \qquad (41)$$

183. Ausweitung. Es seien jetzt $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ zwei Einheitsvektoren, $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ die nach (41) zu berechnenden transformierten Einheitsvektoren; ferner sei der Winkel $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ mit φ, der Winkel $(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2')$ mit $\varphi - 2\gamma$ bezeichnet. 2γ gibt dann die Winkelverzerrung; sie wird häufig als Ausweitung des Winkels φ bezeichnet. Um die Ausweitung zu berechnen, bildet man nach (41)

$$(1 + \varepsilon_{\mathfrak{e}_1})(1 + \varepsilon_{\mathfrak{e}_2})\,\mathfrak{e}_1' \cdot \mathfrak{e}_2' = \mathfrak{e}_1 \cdot (I + \nabla \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{e}_2 \cdot [I + \nabla \mathfrak{v}])$$

oder

$$(1+\varepsilon_{e_1})(1+\varepsilon_{e_2})\cos(\varphi-2\gamma)=\cos\varphi+e_1\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_2+e_2\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_1 + e_1\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot(e_2\cdot\nabla\mathfrak{v}).$$

Hieraus folgt (bis auf Größen höherer Ordnung):

$$2\gamma\sin\varphi+(\varepsilon_{e_1}+\varepsilon_{e_2})\cos\varphi=e_1\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_2+e_2\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_1. \tag{42}$$

Damit ist die Ausweitung eines Winkels bestimmt.

Speziell ergibt sich für die Ausweitung eines rechten Winkels $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$2\gamma=e_1\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_2+e_2\cdot\nabla\mathfrak{v}\cdot e_1. \tag{43}$$

Läßt man in (42) beide Richtungen e_1, e_2 zusammenfallen, so wird man wieder auf die Gleichung (40) geführt, welche die Dilatation in dieser Richtung gibt.

184. Reine Deformation. Aus der Form der Gleichungen (40) und (42) bzw. (43) ist ersichtlich, daß Dilatation und Ausweitung nur von dem symmetrischen Teil der Verzerrungsdyade abhängen, während der antisymmetrische Teil bei der Bildung von ε_e und γ hinausfällt.

Die Verzerrungsdyade kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden:

$$\nabla\mathfrak{v}=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)+\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}-\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla), \tag{44}$$

wobei sich in der zu $\nabla\mathfrak{v}$ konjugierten Dyade $\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla$ das Differentiationssymbol ∇ auf den vorhergehenden Faktor bezieht. Der symmetrische Teil soll abkürzend

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)=\varepsilon \tag{45}$$

gesetzt werden. Dann nehmen (37) und (38) folgende Form an (nach Ziff. 140):

$$d\mathfrak{v}=d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon-\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v}); \tag{46}$$

$$d\mathfrak{r}'=d\mathfrak{r}\cdot(I+\varepsilon)-\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v}). \tag{47}$$

Nach (47) wird die durch die infinitesimale Verrückung hervorgebrachte affine Abbildung der Umgebung von P in die von P' in eine reine Dehnung und eine Drehung zerlegt. Nach (46) zerfällt die zugehörige Verzerrung in die zu der reinen Dehnung gehörige Verzerrung und in die Drehung selbst.

Die Drehung als einen Teil der Verzerrung aufzufassen, widerspricht einigermaßen dem Sprachgebrauch, da bei einer Drehung

Längen und Winkel ungeändert bleiben. Um das auch analytisch einzusehen, ersetzt man in (40) und (42) $\nabla\mathfrak{v}$ durch seinen antisymmetrischen Teil $\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v} - \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)$; dann verschwinden $\varepsilon_\mathfrak{e}$ und γ.

Vielmehr ist die ganze Dilatation und die ganze Ausweitung auf Rechnung der mit der reinen Dehnung verbundenen Verzerrung zu setzen; diese soll deshalb als reine Deformation bezeichnet werden, und die zugehörige Dyade

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v} + \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla) \tag{48}$$

als Deformations-Dyade. Ersetzt man in (40) und (42) $\nabla\mathfrak{v}$ durch $\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v} + \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)$, so bleiben $\varepsilon_\mathfrak{e}$ und γ ungeändert. Mithin ist die Dilatation

$$\varepsilon_\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}; \tag{49}$$

die halbe Ausweitung γ eines Winkels φ folgt aus

$$\gamma\sin\varphi + \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mathfrak{e}_1} + \varepsilon_{\mathfrak{e}_2})\cos\varphi = \mathfrak{e}_1\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}_2; \tag{50}$$

speziell die eines rechten Winkels aus

$$\gamma = \mathfrak{e}_1\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}_2. \tag{51}$$

185. Die Verzerrungskoeffizienten für rechtwinklige Koordinaten. Auf ein Dreibein $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bezogen, soll die Verrückung durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w$$

gegeben sein, wo u, v, w stetige Funktionen der Koordinaten x, y, z sind. Dann wird die Deformationsdyade (48)

$$\varepsilon = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{53}$$
$$+\frac{1}{2}(\mathfrak{j}\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\mathfrak{j})\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}(\mathfrak{k}\mathfrak{i}+\mathfrak{i}\mathfrak{k})\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}(\mathfrak{i}\mathfrak{j}+\mathfrak{j}\mathfrak{i})\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Hieraus lassen sich die Dilatationen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ in Richtung der Hauptachsen und die halben Ausweitungen $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ der von je zwei Koordinatenachsen gebildeten rechten Winkel berechnen:[1])

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right);\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right);\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{54}$$

---

1) Vielfach werden die hier mit γ bezeichneten Größen in der Literatur $\frac{\gamma}{2}$ genannt; also die Ausweitungen nicht mit 2γ, sondern mit γ bezeichnet.

Diese 6 Größen heißen die Verzerrungskoeffizienten. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Deformationsdyade in die Form

$$\varepsilon = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\varepsilon_x + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\varepsilon_y + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\varepsilon_z + (\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{j})\gamma_{yz} + (\mathfrak{k}\mathfrak{i} + \mathfrak{i}\mathfrak{k})\gamma_{xz} + (\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \mathfrak{j}\mathfrak{i})\gamma_{xy} \tag{55}$$

bringen.

186. Dilatationsflächen. Die Tensorflächen der Deformationsdyade:

$$2F = d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon\cdot d\mathfrak{r} = \text{const}, \tag{56}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$2F = \varepsilon_x dx^2 + \varepsilon_y dy^2 + \varepsilon_z dz^2 + 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{xz} dx dz + 2\gamma_{yz} dy dz = \text{const} \tag{56'}$$

werden als Dilatationsflächen bezeichnet. Den allgemeinen Eigenschaften der Tensorflächen zufolge (Ziff. 142) ist

$$\operatorname{grad} F = d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon; \tag{57}$$

$d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon$ ist nach (46) die als Folge der reinen Dehnung eintretende Verzerrung, die reine Deformation. Diese ist also der Gradient des Feldes, dessen Niveauflächen die Dilatationsflächen sind; sie steht in jedem Punkt Q der Umgebung von P auf der hindurchgehenden Dilatationsfläche senkrecht, und ihr Betrag ist in allen Punkten einer Dilatationsfläche umgekehrt proportional dem Abstand von einer beliebig aber fest gewählten benachbarten Dilatationsfläche.

Nach (49) wird die Dilatation für eine Richtung $\mathfrak{e}$

$$\varepsilon_{\mathfrak{e}} = \frac{d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon\cdot d\mathfrak{r}}{|d\mathfrak{r}|^2} = \frac{2F}{|d\mathfrak{r}|^2}. \tag{58}$$

Die Dilatation in einer beliebigen Richtung ist also umgekehrt proportional dem Quadrat des in diese Richtung fallenden Halbmessers einer beliebig aber fest gewählten Dilatationsfläche. —

Unter den Dilatationsflächen befindet sich ein Kegel

$$d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon\cdot d\mathfrak{r} = 0;$$

er ist reell, wenn die Dilatationsflachen Hyperboloide sind, und bildet den Übergang von den zweischaligen Hyperboloiden zu den einschaligen.

Auf dem Kegelmantel ist $F = 0$, zu beiden Seiten hat F verschiedenes Vorzeichen. Da nach (58) das Vorzeichen von $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ dasselbe ist wie das von F, trennt der Kegel ein Gebiet, in dem die Dilatation positiv ist, also alle Ortsvektoren verlängert werden, von einem Gebiet negativer Dilatation, in dem alle Ortsvektoren

verkürzt werden. Auf der einen Seite des Kegels bildet die Verzerrung $d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon$ mit dem Ortsvektor $d\mathfrak{r}$ einen spitzen, auf der andern einen stumpfen Winkel. Für die Ortsvektoren, die dem Kegelmantel angehören, ist die Dilatation Null.

187. Hauptdilatationen. Bezieht man die Dilatationsflächen auf die Hauptachsen, so nimmt ihre Gleichung die Form an:

$$2F = \varepsilon_1 dx^2 + \varepsilon_2 dy^2 + \varepsilon_3 dz^2 = \text{const.} \tag{59}$$

Die 3 Größen γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} verschwinden, weil für die Hauptachsen die Richtung der Deformation mit der Richtung des Ortsvektors zusammenfällt. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sind die Dilatationen in Richtung der Hauptachsen, die Hauptdilatationen.

188. Maßellipsoid der Deformation. Eine Einheitskugel

$$d\mathfrak{r}\cdot d\mathfrak{r} = 1$$

wird durch die lineare Vektorfunktion

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon\,\cdot$$

in ein Ellipsoid

$$d\mathfrak{v}\cdot\varepsilon^{-2}\cdot d\mathfrak{v} = 1 \tag{60}$$

übergeführt. Da die lineare Vektorfunktion nach (46) jedem Kugelradius die bei der reinen Dehnung eintretende Verzerrung, also die reine Deformation zuordnet, ist das Ellipsoid (60) das Maßellipsoid der Deformation. Seine Halbmesser sind die Deformationen der Radien der Einheitskugel.

Das Maßellipsoid hat dieselben Hauptachsen wie die Dilatationsflächen; auf diese Achsen bezogen hat es die Gleichung

$$\frac{du^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{dv^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{dw^2}{\varepsilon_3^2} = 1. \tag{60'}$$

189. Volumdilatation. Bei der Verzerrung des Raumes bleibt ein infinitesimales Volumen im allgemeinen nicht ungeändert. Der Quotient aus der Volumänderung und dem ursprünglichen Volumen heißt Volumdilatation und soll mit e bezeichnet werden.

Wenn ein Parallelepiped mit den Kanten $d_1\mathfrak{r}$, $d_2\mathfrak{r}$, $d_3\mathfrak{r}$ in ein Parallelepiped mit den Kanten $d_1\mathfrak{r}'$, $d_2\mathfrak{r}'$, $d_3\mathfrak{r}'$ verzerrt wird, ist seine Volumdilatation

$$e = \frac{[d_1\mathfrak{r}'\,d_2\mathfrak{r}'\,d_3\mathfrak{r}'] - [d_1\mathfrak{r}\,d_2\mathfrak{r}\,d_3\mathfrak{r}]}{[d_1\mathfrak{r}\,d_2\mathfrak{r}\,d_3\mathfrak{r}]}.$$

Nach (38) ergibt sich bis auf Größen höherer Ordnung

$$e = \frac{[d_1\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v}\,d_2\mathfrak{r}\,d_3\mathfrak{r}] + [d_1\mathfrak{r}\,d_2\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v}\,d_3\mathfrak{r}] + [d_1\mathfrak{r}\,d_2\mathfrak{r}\,d_3\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v}]}{[d_1\mathfrak{r}\,d_2\mathfrak{r}\,d_3\mathfrak{r}]}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist aber nach Ziffer 164 nichts anderes als die erste Invariante von $\nabla\mathfrak{v}$; also ist

$$e = (\nabla\mathfrak{v})_{\mathrm{I}} = \operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{61}$$

die bei der Verzerrung eintretende, von dem ursprünglichen Volumen unabhängige Volumdilatation.

Für volumtreue Verzerrungen ist $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$; die für inkompressible Flüssigkeiten geltende Kontinuitätsgleichung hat also eine weiter reichende Bedeutung. —

Da die erste Invariante einer Dyade mit der ihres symmetrischen Teils zusammenfällt, ist die Volumdilatation auch

$$e = \varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{62}$$

speziell unter Einführung der Hauptdilatationen:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \tag{62'}$$

190. Abspaltung einer volumtreuen Verzerrung. Jede infinitesimale Verzerrung kann in zwei Teile zerlegt werden, deren erster volumtreu ist und deren zweiter eine Ähnlichkeitstransformation ist. Man hat, um diese Zerlegung auszuführen, $\nabla\mathfrak{v}$ in der Form

$$\nabla\mathfrak{v} = \alpha + pI$$

anzusetzen, wobei α eine Dyade bedeutet, deren erster Skalar Null ist, und p einen skalaren Faktor.

Eine derartige Zerlegung ist für jede Dyade Φ möglich. Setzt man

$$\Phi = \alpha + pI$$

und verlangt, daß

$$\alpha_{\mathrm{I}} = 0$$

sein soll, so ist

$$\Phi_{\mathrm{I}} = 3p, \quad \text{also} \quad p = \frac{1}{3}\Phi_{\mathrm{I}};$$

dann ist

$$\alpha = \Phi - \frac{1}{3}\Phi_{\mathrm{I}} I$$

der gesuchte erste Summand, dessen erster Skalar verschwindet.

Wendet man diese Zerlegung auf eine Verzerrungsdyade $\nabla\mathfrak{v}$ an, so erhält man

$$\nabla\mathfrak{v} = \left(\nabla\mathfrak{v} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, I\right) + \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, I; \tag{63}$$

der erste Summand $\left(\nabla\mathfrak{v} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, I\right)$ bewirkt eine volumtreue Verzerrung, der zweite Summand $\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{v}\, I$ entspricht einer Ähnlichkeitstransformation.

191. Kompatibilitätsbedingungen. Bisher wurden die Verzerrungs- und Deformationsdyade stets nur in der Umgebung eines Punktes betrachtet, nicht als tensorielle Feldfunktionen.

Untersucht man das Feld der Deformationsdyade, so bemerkt man, daß nicht jede als Funktion des Ortsvektors gegebene symmetrische Dyade als Deformationsdyade aufgefaßt werden kann. Die Bedingungen, welchen die 6 Maßzahlen einer Deformationsdyade genügen müssen, werden als Kompatibilitätsbedingungen bezeichnet.

Soll eine symmetrische Dyade eine Deformationsdyade sein, so muß sie in die Form:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla)$$

gesetzt werden können. Die Bedingung, der ε genügen muß, erhält man, indem man aus dieser Gleichung $\mathfrak{v}$ eliminiert, d. h. eine Invariante von ε bildet, die für die rechte Seite der Gleichung identisch verschwindet. Das ist der Fall, wenn man

$$\nabla \times \varepsilon \times \nabla = \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla) \times \nabla$$

bildet. Denn in $\nabla \times \nabla \mathfrak{v} \times \nabla$ und $\nabla \times \mathfrak{v}\nabla \times \nabla$ gilt das assoziative Gesetz; es ist aber $\nabla \times \nabla \mathfrak{v} = 0$ und $\mathfrak{v}\nabla \times \nabla = 0$ [vergl. Ziff. 81 (IX)]. Also ist

$$\nabla \times \varepsilon \times \nabla = 0 \tag{64}$$

die vektorielle Form der Kompatibilitätsbedingungen.

$\nabla \times \varepsilon \times \nabla$ ist eine symmetrische Dyade, deren 6 Maßzahlen verschwinden müssen. Durch Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten erhält man etwas mühsam 2 Gruppen von je 3 Gleichungen, von denen je eine angeführt sei:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen gehen die übrigen durch zyklische Vertauschung hervor.

Die beiden Teile, in welche in Ziff. 190 eine Verzerrungsdyade zerlegt wurde, genügen jeder für sich den Kompatibilitätsbedingungen nicht; sie können nicht als Felddyaden einer Verzerrung aufgefaßt werden.

192. Von der Zeit abhängige Verrückungen. Vielfach treten namentlich in der Hydrodynamik und Elektrodynamik die Ver-

rückungen $\mathfrak{v}$ und die zugehörigen Verzerrungen $d\mathfrak{v}$ als Funktionen der Zeit auf.

Wir betrachten in einer kontinuierlichen Massenverteilung einen Punkt $P(\mathfrak{r})$ und die Punkte $Q(\mathfrak{r}+d\mathfrak{r})$ einer Umgebung von P. Es sei $\mathfrak{v}$ die auf die Zeiteinheit bezogene Verrückung des Massenpunktes P, also seine Geschwindigkeit; $\mathfrak{v}+d\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes Q seiner Umgebung. Dann ist nach (46)

$$\mathfrak{v}+d\mathfrak{v}=\mathfrak{v}+d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v}=\mathfrak{v}+d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon-\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v}). \qquad (65)$$

Faßt man die die Umgebung von P erfüllende Masse als ein Ganzes ins Auge, so zerfällt also ihre Bewegung in drei Teile:

a) bewegt sich die Masse translatorisch wie ein starrer Körper mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$;

b) erleidet sie eine reine Deformation, die mit der Geschwindigkeit $d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}+\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)\cdot d\mathfrak{r}$ vor sich geht;

c) dreht sie sich wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$, wobei jeder Massenpunkt die Tangentialgeschwindigkeit

$$-\frac{1}{2}d\mathfrak{r}\times(\nabla\times\mathfrak{v})=\mathfrak{u}\times d\mathfrak{r}$$

besitzt.

Führt man Koordinaten ein, so erhält man die infolge der reinen Deformation b) eintretenden Geschwindigkeitsunterschiede eines Punktes Q der Umgebung gegenüber dem Bezugspunkt P, indem man die unter (53) in Komponenten zerlegte Dyade der Deformationsgeschwindigkeit mit dem Ortsvektor $d\mathfrak{r}=\mathfrak{i}dx+\mathfrak{j}dy+\mathfrak{k}dz$ skalar multipliziert:

$$\begin{aligned}
du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz;\\
dv&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dz;\\
dw&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.
\end{aligned} \qquad (66\,a)$$

Ebenso ergibt sich für die Tangentialgeschwindigkeit der Drehung c):

$$\begin{aligned}
du&=\quad * \quad -\zeta dy+\eta dz\\
dv&=\zeta dx \quad * \quad -\xi dz\\
dw&=-\eta dx+\xi dy \quad * \quad ,
\end{aligned} \qquad (66\,b)$$

wo

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

die Maßzahlen der Winkelgeschwindigkeit, also die schon vielfach verwendeten „Wirbelkomponenten" sind. —

Der Geschwindigkeitsunterschied (65)

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot\nabla\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\cdot\varepsilon - \frac{1}{2}\,d\mathfrak{r}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}$$

zweier Nachbarpunkte führt zum Begriff der Geschwindigkeitsänderung eines Massenpunktes, also zur konvektiven Beschleunigung, wenn man als Ortsvektor $d\mathfrak{r}$ den von dem Massenpunkt in der infinitesimalen Zeit dt selbst durchlaufenen Weg einführt, also $d\mathfrak{r} = \mathfrak{v}\,dt$ setzt. Dann wird

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}\cdot(\nabla\mathfrak{v} + \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\overset{\vee}{\nabla}) - \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}. \qquad (67)$$

Dieser Ausdruck kann auf den früher gefundenen Ausdruck für die konvektive Beschleunigung [Ziff. 100 (65)]

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,\nabla(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}$$

mittels der Anwendung des Entwicklungssatzes auf $\mathfrak{v}\times(\nabla\times\mathfrak{v})$ und der Identität [Ziff. 80 (IV)]

$$\nabla(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}) = 2(\nabla\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{v}\cdot(\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\nabla)$$

zurückgeführt werden.

§ 3. Spannungszustand.

193. Reduzierte Spannung. Wenn in einer Massenverteilung ein Spannungszustand herrscht, so wirken auf ein beliebiges inneres Flächenelement nach dem Reaktionsprinzip von beiden Seiten her entgegengesetzt gleiche Kräfte. Denkt man sich aus der Massenverteilung einen Teil herausgeschnitten, so wird ein ursprünglich bestehendes Gleichgewicht gestört. Um es wiederherzustellen, hat man an den Oberflächenelementen des herausgeschnittenen Teiles Ersatzkräfte anzubringen, die den ursprünglich von dem weggenommenen Teil ausgehenden Kräften gleich sind. Die auf ein Flächenelement wirkende Kraft heißt Spannung; die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung wird reduzierte Spannung genannt und mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet.

194. Gleichgewicht eines Spannungszustandes. Auf einen beliebig herausgeschnittenen Körper wirken die Spannungen nur an der Oberfläche. Im Innern verschwinden sie nach dem Reaktionsprinzip; ebenso soll ihr Moment verschwinden. Außer den Spannungen können Massenkräfte vorhanden sein, die, bezogen auf die Masseneinheit, mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden. Die Dichte des Körpers sei ϱ. Dann sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\int\mathfrak{p}\,do + \int\varrho\,\mathfrak{K}\,d\tau = 0 \text{ (Schwerpunktsatz)} \qquad (68\,a)$$

und:

$$\int \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}\, do + \int \varrho\, \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}\, d\tau = 0 \text{ (Flächensatz).} \tag{68b}$$

Dividiert man die Gleichung (68a) durch die Oberfläche $\int do$ des herausgeschnittenen Körpers und läßt hierauf Volumen und Oberfläche des Körpers gegen Null konvergieren, so erhält man:

$$\lim \frac{\int \mathfrak{p}\, do}{\int do} + \lim \frac{\int \varrho\, \mathfrak{K}\, d\tau}{\int do} = 0.$$

Der zweite Grenzwert verschwindet identisch, da der Zähler von höherer Ordnung Null wird als der Nenner, vorausgesetzt, daß $\varrho\,\mathfrak{K}$ im Integrationsbereich endlich ist. Folglich muß

$$\lim \frac{\int \mathfrak{p}\, do}{\int do} = 0$$

sein; es muß der Zähler von höherer Ordnung verschwinden als der Nenner. Sein Verschwinden rührt also nicht allein von dem Verschwinden der Oberfläche her, sondern auch davon, daß *die an einem genügend kleinen Körper angreifenden Spannungen ein Gleichgewichtssystem bilden.*

Der analoge Schluß läßt sich für die Momente der Spannungen aus (68b) herleiten.

195. Gleichgewicht am Tetraeder. Um die Gleichgewichtsbedingungen in der Umgebung eines Punktes zu finden, soll ein kleines Tetraeder abgegrenzt werden, von dem drei Seitenflächen in die Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems fallen und die vierte Seite im ersten Oktanten liegt. Dann sind die Spannungen, die an den vier Tetraederseiten von außen angreifen, im Gleichgewicht. Oder: die an der vierten Seite angreifende Spannung ist die Resultierende der drei Ersatzkräfte, die nach Wegnahme des Tetraeders an den Koordinatenebenen angreifen:

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{n}}\, do = \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}\, do \cos\alpha + \mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}\, do \cos\beta + \mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}\, do \cos\gamma. \tag{69}$$

Mit do ist der Flächeninhalt der vierten Seite bezeichnet; $do \cos\alpha$, $do \cos\beta$, $do \cos\gamma$ sind die Flächeninhalte der drei anderen Seiten, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$ der vierten Seite bedeuten. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{n}}$ ist die reduzierte Spannung, die von außen her an der vierten Seite des Tetraeders angreift; $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}$ sind die reduzierten Spannungen, die nach Wegnahme des Tetraeders an den Koordinatenebenen angebracht werden müssen. Bei

allen vier Spannungen gibt der Index $\mathfrak{n}, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ die Richtung derjenigen Normalen an, die nach dem jedesmal weggenommenen Teil weist.

Die aus (69) folgende Gleichung

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_\mathfrak{i} \cos\alpha + \mathfrak{p}_\mathfrak{j} \cos\beta + \mathfrak{p}_\mathfrak{k} \cos\gamma \tag{70}$$

gibt, wenn das Volumen des Tetraeders gegen Null geht, eine Beziehung zwischen den reduzierten Spannungen an den Koordinatenebenen und an einer beliebigen vierten Ebene durch den Koordinatenanfang. (70) kann in die Form:

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{n} = (\mathfrak{i} \cos\alpha + \mathfrak{j} \cos\beta + \mathfrak{k} \cos\gamma) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{p}_\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{p}_\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{p}_\mathfrak{k}) \tag{71}$$

gesetzt werden. Auf der rechten Seite ist der erste Faktor

$$\mathfrak{i} \cos\alpha + \mathfrak{j} \cos\beta + \mathfrak{k} \cos\gamma = \mathfrak{n} \tag{72}$$

der Einheitsvektor der Normalen der beliebig gewählten Ebene. Der zweite Faktor

$$\mathfrak{i}\mathfrak{p}_\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{p}_\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{p}_\mathfrak{k} = \sigma \tag{73}$$

ist eine Dyade und soll als *Spannungsdyade* bezeichnet werden. Mithin wird *die an einer beliebigen Ebene angreifende reduzierte Spannung*

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \sigma. \tag{74}$$

Die Beziehung zwischen der Stellung einer Ebene und der an ihr angreifenden reduzierten Spannung wird durch eine lineare Vektorfunktion vermittelt.

196. Gleichgewichtsbedingungen im Spannungsfeld. Bei Einführung der Spannungsdyade folgt aus (68a):

$$\int \varrho \mathfrak{K} d\tau + \int d\mathfrak{o} \cdot \sigma = 0.$$

Hierbei bedeutet σ eine von Punkt zu Punkt veränderliche Spannungsdyade. Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes auf das zweite Integral ergibt:

$$\int \varrho \mathfrak{K} d\tau + \int \nabla \cdot \sigma d\tau = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebig begrenzte Volumina gilt, ist

$$\varrho \mathfrak{K} + \nabla \cdot \sigma = 0. \tag{75}$$

Das ist die *Gleichgewichtsbedingung zwischen den äußeren Kräften und den inneren Spannungen* in irgendeinem Punkt eines Spannungsfeldes.

Führt man die Spannungsdyade auch in (68b) ein, so folgt

$$\int \varrho \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}\, d\tau + \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{o} \cdot \sigma) = 0$$

oder

$$\int \varrho \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}\, d\tau - \int d\mathfrak{o} \cdot (\sigma \times \mathfrak{r}) = 0.$$

Nach dem Gaußschen Satz [Ziff. 84 (31')] wird

$$\int \varrho \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}\, d\tau - \int \nabla \cdot (\sigma \times \mathfrak{r})\, d\tau = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt wie oben:

$$\varrho \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} - \nabla \cdot (\sigma \times \mathfrak{r}) = 0. \tag{76}$$

Das ist die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Momenten der äußeren Kräfte und der inneren Spannungen. In dem zweiten Glied dieser Gleichung bezieht sich die Differentiation auf beide Faktoren. Es wird

$$\varrho \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} - \nabla \cdot \overset{\downarrow}{\sigma} \times \mathfrak{r} - \nabla \cdot \sigma \times \overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = 0.$$

Nach (75) reduziert sich diese Gleichung auf

$$\nabla \cdot \sigma \times \overset{\downarrow}{\mathfrak{r}} = 0$$

oder nach [Ziff. 163 (119)]

$$\sigma_\times = 0. \tag{77}$$

Das ist aber nach Ziff. 139 die Bedingung dafür, daß die Spannungsdyade σ symmetrisch ist.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung (76) reduziert sich also auf die Bedingung der Symmetrie der Spannungsdyade und ist keine Bedingung zwischen den äußeren Kräften und inneren Spannungen, wenn die erste Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

197. Formeln für rechtwinklige Koordinaten. Die Spannungsdyade σ soll, bezogen auf ein Dreibein, in der Form

$$\begin{aligned}\sigma = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\sigma_x + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\sigma_y + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\sigma_z \\ + \mathfrak{j}\mathfrak{k}\tau_{yz} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}\tau_{zy} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}\tau_{zx} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}\tau_{xz} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}\tau_{xy} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}\tau_{yx}\end{aligned} \tag{78}$$

angesetzt werden. Wegen (77) ist

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Um die Bedeutung der Spannungskoeffizienten, d. h. der Maßzahlen der Spannungsdyade σ, zu erkennen, bildet man die reduzierten Spannungen für Flächenelemente, die den Koordinatenebenen angehören. Nach (73) und (78) ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_\mathfrak{i} &= \mathfrak{i} \cdot \sigma = \mathfrak{i}\sigma_x + \mathfrak{j}\tau_{xy} + \mathfrak{k}\tau_{xz};\\ \mathfrak{p}_\mathfrak{j} &= \mathfrak{j} \cdot \sigma = \mathfrak{i}\tau_{yx} + \mathfrak{j}\sigma_y + \mathfrak{k}\tau_{yz};\\ \mathfrak{p}_\mathfrak{k} &= \mathfrak{k} \cdot \sigma = \mathfrak{i}\tau_{zx} + \mathfrak{j}\tau_{zy} + \mathfrak{k}\sigma_z.\end{aligned} \tag{79}$$

Jede dieser drei reduzierten Spannungen ist in drei Komponenten zerlegt, von denen eine normal und zwei tangential sind. σ_x, σ_y, σ_z sind die reduzierten Normalspannungen (Zug oder Druck) zu den Ebenen des Koordinatensystems. Die sechs Größen τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, τ_{xz}, τ_{xy}, τ_{yx} sind reduzierte Schubspannungen, sie liegen in einer Ebene, deren Stellung durch den ersten Index gekennzeichnet ist, während der zweite Index ihre Richtung gibt. Allerdings ist wegen der Symmetrie der Spannungsdyade und der daraus folgenden Gleichheit je zweier Schubspannungskoeffizienten die Reihenfolge der Indizes unwesentlich.

Es soll jetzt die zu einer beliebig gerichteten Ebene gehörige reduzierte Spannung (74)

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cdot \sigma \tag{80}$$

in Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen zerlegt werden in der Form:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{i} p_x + \mathfrak{j} p_y + \mathfrak{k} p_z.$$

Aus (78) liest man folgende Formeln ab:

$$\begin{aligned} p_x &= \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{i} = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma; \\ p_y &= \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{j} = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma; \\ p_z &= \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{k} = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma. \end{aligned} \tag{81}$$

Diese Gleichungen (81) werden als Cauchysche Gleichungen bezeichnet.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich auch sofort die Grenzbedingungen. An der Grenze des von der Massenverteilung erfüllten Gebietes wird die Spannung $\mathfrak{p}$ durch eine äußere Flächenkraft $\mathfrak{P}$ ersetzt.

Die Gleichgewichtsbedingung (75) zwischen den Massenkräften und den Spannungen in einem inneren Punkt zerfällt in folgende drei skalare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0; \\ \varrho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0; \\ \varrho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{82}$$

198. Spannungsflächen. Die Tensorflächen der Spannungsdyade σ

$$2F = \mathfrak{r} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{r} = \text{const} \tag{83}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$2F = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{xz} xz + 2\tau_{yz} yz = \text{const}$$

werden als *Spannungsflächen* bezeichnet. Nach den Eigenschaften der Tensorflächen ist

$$\operatorname{grad} F = \mathfrak{r} \cdot \sigma$$

oder wenn man den Einheitsvektor des Ortsvektors mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet, also $\mathfrak{r} = r\mathfrak{n}$ setzt:

$$\operatorname{grad} F = r\mathfrak{n} \cdot \sigma = r\mathfrak{p}. \tag{84}$$

Greift man aus den Spannungsflächen eine beliebige heraus, so gibt ihre Normalenrichtung in jedem Punkt die Richtung der Spannung, die an einem Flächenelement angreift, das auf dem zugehörigen Ortsvektor senkrecht steht. Die Normalkomponente dieser Spannung ist

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \mathfrak{n} = \frac{2F}{r^2},$$

also umgekehrt proportional dem Quadrat des Betrags des Ortsvektors.

Schneidet man das Feld der Spannungsflächen durch eine Einheitskugel vom selben Mittelpunkt, so ist in den Punkten dieser Kugel nach (84)

$$\operatorname{grad} F = \mathfrak{p}.$$

Der Gradient des Feldes in einem Punkt der Einheitskugel ist also gleich der Spannung, die an einer Ebene angreift, welche auf dem Ortsvektor senkrecht steht. —

Die Spannungsfläche einer isotropen Spannung, wie sie z. B. als isotroper Druck bei idealen Flüssigkeiten auftritt, ist eine *Kugel*.

199. Hauptspannungen. Bezieht man die Spannungsflächen auf ihre Hauptachsen, so wird ihre Gleichung

$$2F = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \text{const};$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ heißen die *Hauptspannungen*. Die zu den Koordinatenebenen gehörigen Schubspannungen verschwinden. Es gibt also *drei ausgezeichnete, zueinander senkrechte Stellungen eines Flächenelements, für die die reduzierte Spannung eine reine Normalspannung wird.*

200. Lamésches Spannungsellipsoid. Die zu allen Stellungen eines Flächenelements gehörigen reduzierten Spannungen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cdot \sigma$$

sind die Ortsvektoren des Maßellipsoids der Spannungsdyade. Dieses wird *Lamésches Spannungsellipsoid* genannt. Aus

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p} \cdot \sigma^{-1}$$

und

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = 1$$

folgt als Gleichung des Laméschen Ellipsoids:

$$\mathfrak{p} \cdot \sigma^{-2} \cdot \mathfrak{p} = 1 . \qquad (85)$$

Nach einer (Ziff. 147) aufgestellten Beziehung zwischen Einheitskugel und Maßellipsoid entspricht einem Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ eine Spannung $\mathfrak{p}$, deren Betrag gleich dem Mittelpunktsabstand derjenigen Tangentialebene des Laméschen Ellipsoids ist, die auf $\mathfrak{n}$ senkrecht steht; oder: der Betrag der reduzierten Spannung, die an einem Flächenelement angreift, ist gleich der Länge des Lotes auf die parallele Tangentialebene des Laméschen Ellipsoids (Fig. 72).

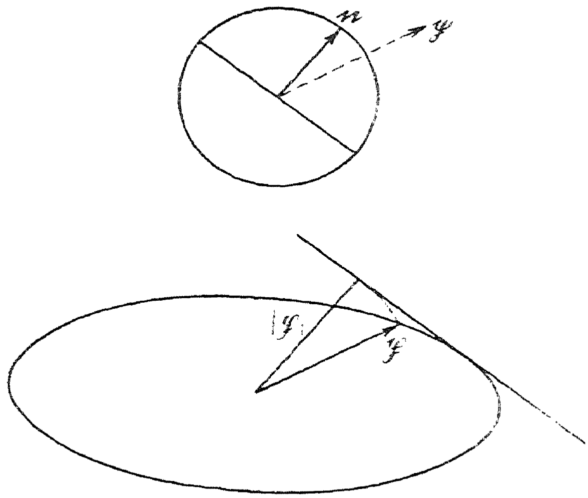


Fig. 72.

201. Spannungsrichtflächen. Die reziproken Tensorflächen der Spannungsdyade σ heißen Spannungsrichtflächen. Setzt man

$$\mathfrak{r} \cdot \sigma = r\,\mathfrak{p} = \mathfrak{p}', \qquad (86)$$

so wird ihre Gleichung

$$2F = \mathfrak{p}' \cdot \sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}' = \text{const.}$$

Der Ortsvektor $\mathfrak{p}'$ hat die Richtung der Spannung $\mathfrak{p}$, unterscheidet sich im allgemeinen aber durch den Betrag. Der Gradient des Feldes der Spannungsrichtflächen ist

$$\operatorname{grad} F = \mathfrak{p}' \cdot \sigma^{-1} = \mathfrak{r} .$$

gibt also die Stellung des Flächenelements, an dem die Spannung angreift.

Die Richtung der Spannung, die an einem zu einer Tangentialebene einer Spannungsrichtfläche parallelen Flächenelement angreift, wird durch den nach dem Berührpunkt führenden Ortsvektor bestimmt.

202. Cauchysches Spannungsellipsoid. Das reziproke Maßellipsoid der Spannungsdyade σ wird erhalten, indem man die Einheitskugel

$$\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}' = 1$$

oder

$$r^2 \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = 1 \qquad (87)$$

mittels (86) transformiert. Seine Gleichung ist

$$\mathfrak{r}\cdot\sigma^2\cdot\mathfrak{r} = 1: \tag{88}$$

es wird als Cauchysches Spannungsellipsoid bezeichnet. Nach (87) ist der Betrag der Spannung, die an einem Flächenelement angreift, umgekehrt proportional dem Betrag desjenigen Ortsvektors des Cauchyschen Spannungsellipsoids, der auf dem Flächenelement senkrecht steht.

§ 4. Elastische Spannungen.

203. Hookesches Gesetz. Wenn ein Volumenelement eine elastische Deformation erfährt, bestehen zwischen den Koeffizienten der Deformationsdyade ε und den Koeffizienten der Spannungsdyade σ lineare Beziehungen. Das ist die Aussage des Hookeschen Gesetzes in allgemeinster Form.

Es soll nun ein isotropes Medium vorausgesetzt werden. In einem solchen fallen die Hauptdehnungsrichtungen mit den Hauptspannungsrichtungen zusammen, und die durch gleich große reduzierte Spannungen hervorgebrachten Verzerrungen sind gleich groß.

Eine reduzierte Hauptspannung σ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) bringt eine reduzierte Dehnung von der Größe $\frac{\sigma_\nu}{E}$ hervor. E ist eine von der Richtung unabhängige Materialkonstante und heißt Elastizitätsmodul. Die Dehnung ist begleitet von einer Querkontraktion, d. i. einer negativen Dehnung in jeder zur Hauptrichtung senkrechten Richtung von der Größe $-\varkappa\frac{\sigma_\nu}{E}$; hier ist $\varkappa$ das Verhältnis der Querkontraktion zur Dehnung und heißt Poissonsche Konstante.

Es soll nun ein Quader betrachtet werden, der in Richtung der Hauptspannungen orientiert ist. Die Einheitsvektoren in Richtung der Hauptspannungen sollen $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ heißen. Die reduzierte Hauptspannung σ_1 bringt in den Richtungen $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ die reduzierten Dehnungen

$$\frac{\sigma_1}{E}, \quad -\varkappa\frac{\sigma_1}{E}, \quad -\varkappa\frac{\sigma_1}{E}$$

hervor. Ähnlich die beiden anderen Hauptspannungen.

In der Richtung $\mathfrak{i}_1$ treten neben der Dehnung $\frac{\sigma_1}{E}$ die Querkontraktionen $-\varkappa\frac{\sigma_2}{E}$ und $-\varkappa\frac{\sigma_3}{E}$ auf. Ihre Summe gibt die Hauptdilatation ε_1 in Richtung $\mathfrak{i}_1$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \varkappa\frac{\sigma_2}{E} - \varkappa\frac{\sigma_3}{E}$$

oder:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\varkappa}{E}\sigma_1 - \frac{\varkappa}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Ähnlich ε_2 und ε_3.

Bei Zugrundelegung des eingeführten Koordinatensystems ist die Deformationsdyade

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_1 + \varepsilon_2 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_2 + \varepsilon_3 \mathfrak{i}_3 \mathfrak{i}_3,$$

die Spannungsdyade

$$\sigma = \sigma_1 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_1 + \sigma_2 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_2 + \sigma_3 \mathfrak{i}_3 \mathfrak{i}_3.$$

Ihre ersten Invarianten sind:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$\sigma_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Mithin wird

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1+\varkappa}{E}\sigma_1 - \frac{\varkappa}{E}\sigma_I,\\ \varepsilon_2 &= \frac{1+\varkappa}{E}\sigma_2 - \frac{\varkappa}{E}\sigma_I,\\ \varepsilon_3 &= \frac{1+\varkappa}{E}\sigma_3 - \frac{\varkappa}{E}\sigma_I.\end{aligned} \tag{89}$$

und zwischen den beiden Dyaden ε und σ besteht der Zusammenhang

$$\varepsilon = \frac{1+\varkappa}{E}\sigma - \frac{\varkappa}{E}\sigma_I I. \tag{90}$$

Diese Gleichung gibt das Hookesche Gesetz für isotrope Medien in der eingangs formulierten Auffassung.

Aus (90) folgt ein linearer Zusammenhang zwischen den ersten Invarianten ε_I und σ_I:

$$\varepsilon_I = \frac{1+\varkappa}{E}\sigma_I - \frac{3\varkappa}{E}\sigma_I = \frac{1-2\varkappa}{E}\sigma_I. \tag{91}$$

Die Gleichung (90) läßt sich also in die Form

$$\varepsilon = \frac{1+\varkappa}{E}\sigma - \frac{\varkappa}{1-2\varkappa}\varepsilon_I I$$

bringen und nach σ auflösen; man erhält dann das Hookesche Gesetz in der Form:

$$\sigma = \frac{E}{1+\varkappa}\varepsilon + \frac{\varkappa E}{(1+\varkappa)(1-2\varkappa)}\varepsilon_I I$$

oder kürzer:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\varepsilon_I I, \tag{92}$$

wenn man die Laméschen Konstanten

$$\lambda = \frac{\varkappa E}{(1+\varkappa)(1-2\varkappa)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\varkappa)}$$

einführt.

204. Hookesches Gesetz für rechtwinklige Koordinaten. Bezieht man in einem elastischen Spannungsfeld die Umgebung eines Punktes P auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Scheitel in P, so besteht zwischen den Spannungs- und den Deformationskoeffizienten nach dem Hookeschen Gesetz (90) bzw. (92) folgender Zusammenhang:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\varkappa}{E}\,\sigma_x - \frac{\varkappa}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z);\\ \gamma_{xy} &= \frac{1+\varkappa}{E}\,\tau_{xy}\ \text{usw.} \end{aligned}\right| \quad (93\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\,\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z);\\ \tau_{xy} &= 2\mu\,\gamma_{xy}\ \text{usw.} \end{aligned}\right| \quad (93\text{b})$$

205. Virtuelle Formänderungsarbeit. Die Punkte einer kontinuierlichen Massenverteilung im Gleichgewichtszustand sollen durch einen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ festgelegt werden. Erfährt jeder Punkt der Massenverteilung unter der Wirkung äußerer Kräfte eine Verrückung $\mathfrak{v}$, so tritt eine Deformation ein, die vom Auftreten eines Spannungszustandes begleitet ist. Die auftretenden Spannungen halten den äußeren Kräften das Gleichgewicht. Wird der Spannungszustand als elastisch vorausgesetzt, so gilt das Hookesche Gesetz.

Es soll nun eine zweite virtuelle Verrückung $\delta\mathfrak{v}$ vorgenommen werden und die Arbeit der äußeren Kräfte, also der Massenkräfte $\varrho\mathfrak{K}$ und der auf die Begrenzung wirkenden Oberflächenkräfte $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Spannungen ungeändert bleiben. Diese Arbeit ist

$$\delta A = \int \varrho\mathfrak{K}\cdot\delta\mathfrak{v}\,d\tau + \int \mathfrak{p}\cdot\delta\mathfrak{v}\,do.$$

Das zweite Integral wird bei Einführung der Spannungsdyade σ

$$\int \mathfrak{p}\cdot\delta\mathfrak{v}\,do = \int \mathfrak{n}\cdot\sigma\cdot\delta\mathfrak{v}\,do = \int d\mathfrak{o}\cdot\sigma\cdot\delta\mathfrak{v}.$$

Führt man das Oberflächenintegral mittels des Gaußschen Integralsatzes in ein Raumintegral über, so erhält man für die Arbeit den Ausdruck

$$\delta A = \int \varrho\mathfrak{K}\cdot\delta\mathfrak{v}\,d\tau + \int \nabla\cdot(\sigma\cdot\delta\mathfrak{v})\,d\tau$$

und durch Ausführung der Differentiation

$$\delta A = \int \varrho\mathfrak{K}\cdot\delta\mathfrak{v}\,d\tau + \int(\nabla\cdot\sigma)\cdot\delta\mathfrak{v}\,d\tau + \int \nabla\cdot\sigma\cdot\delta\overset{\downarrow}{\mathfrak{v}}\,d\tau.$$

Nach Ziff. 196 (75) verschwindet die Summe der beiden ersten Integrale. In dem letzten Integral wird nach Ziff. 163 (116)

$$\nabla \cdot \sigma \cdot \delta \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} = \nabla \cdot (\delta \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \cdot \sigma) = \nabla \delta \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \cdot\cdot\, \sigma$$

gesetzt. Mithin wird

$$\delta A = \int \nabla \delta \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \cdot\cdot\, \sigma \, d\tau = \int \delta \nabla \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \cdot\cdot\, \sigma \, d\tau .$$

An Stelle der Verzerrungsdyade $\nabla \mathfrak{v}$ kann ihr symmetrischer Teil, die Deformationsdyade ε, eingeführt werden, weil das doppelte skalare Produkt aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Dyade identisch verschwindet [Ziff. 161 (11)]. Also wird

$$\delta A = \int \delta \varepsilon \cdot\cdot\, \sigma \, d\tau \tag{94}$$

oder

$$\delta A = \delta \int \varepsilon \cdot\cdot\, \sigma \, d\tau \tag{95}$$

die bei der virtuellen Verrückung $\delta \mathfrak{v}$ geleisteten Formänderungsarbeit. Dabei ist σ als konstant zu betrachten.

206. Wirkliche Formänderungsarbeit bei elastischem Spannungszustand. Die bei einer wirklichen Verrückung von den äußeren Kräften geleistete Formänderungsarbeit unterscheidet sich von der virtuellen Formänderungsarbeit dadurch, daß die Spannungen während der Verrückung nicht konstant bleiben, sondern Funktionen der eintretenden Verzerrungen sind. Es ist also bei wirklichen Verrückungen nicht zulässig, in (94)

$$\delta A = \int \delta \varepsilon \cdot\cdot\, \sigma \, d\tau$$

das Variationszeichen δ vor das Integral zu setzen, wie das bei konstantem σ erlaubt ist.

Nach dem Hookeschen Gesetz (92) wird

$$\delta A = \int \delta \varepsilon \cdot\cdot \{ 2\mu\varepsilon + \lambda \varepsilon_{\mathrm{I}} I \} \, d\tau .$$

Um das Integral umzuformen, bemerkt man, daß

$$\delta \varepsilon \cdot\cdot\, \varepsilon = \frac{1}{2} \delta (\varepsilon \cdot\cdot\, \varepsilon)$$

und

$$\delta \varepsilon \cdot\cdot\, I = (\delta \varepsilon)_{\mathrm{I}} = \delta \varepsilon_{\mathrm{I}}$$

ist. Damit wird

$$\delta A = \int \left(\mu \delta (\varepsilon \cdot\cdot\, \varepsilon) + \frac{\lambda}{2} \delta \varepsilon_{\mathrm{I}}^{2} \right) d\tau$$

oder

$$\delta A = \delta \int \left(\mu \varepsilon \cdot\cdot\, \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{\mathrm{I}}^{2} \right) d\tau .$$

Bisher wurde nur die Formänderungsarbeit δA bei einer kleinen Verzerrung betrachtet. Die gesamte von den äußeren Kräften ge-

leistete Formänderungsarbeit, ausgehend vom spannungslosen Zustand bis zum betrachteten Spannungszustand, also die ganze in dem Körper aufgehäufte Spannungsenergie ist

$$A = \int \left(\mu \varepsilon \cdot\cdot \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_I^2 \right) d\tau. \tag{96a}$$

Dieser in ε quadratische Ausdruck kann mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes umgeformt werden, und zwar in doppelter Weise. Ersetzt man nur einen Faktor ε durch σ, indem man nach dem Hookeschen Gesetz (92)

$$\mu \varepsilon = \frac{\sigma}{2} - \frac{\lambda}{2} \varepsilon_I I$$

einführt, so kommt

$$A = \int \left(\frac{\sigma \cdot\cdot \varepsilon}{2} - \frac{\lambda}{2} \varepsilon_I I \cdot\cdot \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_I^2 \right) d\tau$$

oder (man bemerke das Auftreten des Faktors $\frac{1}{2}$ im Gegensatz zu (94)!)

$$A = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot\cdot \varepsilon \, d\tau. \tag{96'}$$

Ersetzt man auch den zweiten Faktor ε durch σ, so ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot\cdot \left(\frac{1+\varkappa}{E} \sigma - \frac{\varkappa}{E} \sigma_I I \right) d\tau$$

oder

$$A = \int \left(\frac{1+\varkappa}{2E} \sigma \cdot\cdot \sigma - \frac{\varkappa}{2E} \sigma_I^2 \right) d\tau. \tag{96b}$$

In (96a) und (96b) lassen sich noch die Invarianten nach Ziff. 162 (115) auf die Fundamentalinvarianten reduzieren; dann ergeben sich folgende Ausdrücke für die Spannungsenergie:

$$A = \int \left(\frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \varepsilon_I^2 - 2\mu \varepsilon_{II} \right) d\tau; \tag{97a}$$

$$A = \int \frac{1}{2E} (\sigma_I^2 - 2(1+\varkappa) \sigma_{II}) d\tau. \tag{97b}$$

207. Elastisches Potential. Die nach (96') in der Volumeinheit enthaltene Spannungsenergie

$$\Pi = \frac{1}{2} \sigma \cdot\cdot \varepsilon \tag{98}$$

wird als elastisches Potential bezeichnet. Da bei elastischem Spannungszustand das Hookesche Gesetz gilt, kann das elastische Potential entweder als Funktion der Spannungsdyade allein oder als Funktion der De-

formationsdyade allein aufgefaßt werden; nach (96b) bzw. (96a) wird

$$\Pi = \frac{1+\varkappa}{2E}\sigma\cdot\cdot\sigma - \frac{\varkappa}{2E}\sigma_I^2; \tag{99a}$$

$$\Pi = \mu\varepsilon\cdot\cdot\varepsilon + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_I^2. \tag{99b}$$

Bei einer Variation des elastischen Spannungszustandes tritt eine Änderung des elastischen Potentials ein:

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}[\delta\sigma\cdot\cdot\varepsilon + \sigma\cdot\cdot\delta\varepsilon].$$

Man kann zeigen, daß die beiden auf der rechten Seite auftretenden Summanden einander gleich sind. In der Tat ist nach dem Hookeschen Gesetz (92)

$$\delta\sigma\cdot\cdot\varepsilon = \delta(2\mu\varepsilon + \lambda\varepsilon_I I)\cdot\cdot\varepsilon = \mu\delta(\varepsilon\cdot\cdot\varepsilon) + \frac{\lambda}{2}\delta\varepsilon_I^2;$$

$$\sigma\cdot\cdot\delta\varepsilon = (2\mu\varepsilon + \lambda\varepsilon_I I)\cdot\cdot\delta\varepsilon = \mu\delta(\varepsilon\cdot\cdot\varepsilon) + \frac{\lambda}{2}\delta\varepsilon_I^2;$$

also

$$\delta\sigma\cdot\cdot\varepsilon = \sigma\cdot\cdot\delta\varepsilon.$$

Infolgedessen gelten für die Änderung des elastischen Potentials folgende beiden Ausdrücke:

$$\delta\Pi = \varepsilon\cdot\cdot\delta\sigma; \tag{100a}$$

$$\delta\Pi = \sigma\cdot\cdot\delta\varepsilon. \tag{100b}$$

Wird das elastische Potential als Funktion der Spannungsdyade betrachtet, so erlaubt (100a) die Berechnung der zugehörigen Deformationsdyade durch einen Differentiationsprozeß. Ebenso erhält man nach (100b), wenn das elastische Potential als Funktion der Deformationsdyade betrachtet wird, die zugehörige Spannungsdyade durch einen Differentiationsprozeß.

208. Elastisches Potential für rechtwinklige Koordinaten. Bezieht man Spannungs- und Deformationsdyade auf ein Dreibein, so nehmen die Ausdrücke (98) und (99a, b) für das elastische Potential folgende Gestalt an:

$$\Pi = \frac{1}{2}[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + 2\tau_{xy}\gamma_{xy} + 2\tau_{xz}\gamma_{xz} + 2\tau_{yz}\gamma_{yz}]; \tag{101}$$

$$\Pi = \frac{1+\varkappa}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2] - \frac{\varkappa}{2E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2; \tag{101a}$$

$$\Pi = \mu[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\gamma_{xy}^2 + 2\gamma_{xz}^2 + 2\gamma_{yz}^2] + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2. \tag{101b}$$

Für die Berechnung der reduzierten Spannungen bzw. der Dilatationen und Ausweitungen ergeben sich nach (100a, b) aus (101a, b) die Formeln:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x \text{ usw.}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{xy}} = 2\gamma_{xy} \text{ usw.}; \tag{102a}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x \text{ usw.}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xy}} = 2\tau_{xy} \text{ usw.} \tag{102b}$$

Diese Gleichungen stimmen nach Ausführung der Differentiationen mit (93a, b) überein.

Kapitel 6. Transformationstheorie.

§ 1. Transformation der Basis und der Maßzahlen.

209. Ziel der Untersuchung. Bei den bisherigen Untersuchungen stand die gerichtete Strecke als Bild des Vektors im Mittelpunkt; unbeschadet der Erkenntnis, daß ein tiefer liegender Begriff, nämlich der Vektor als Gedankending, als Zahl höherer Art dahinter steht, und daß die in der Vektorrechnung auftretenden Verknüpfungen gerichteter Strecken nur die geometrischen Bilder von Operationen mit Zahlen höherer Art sind. Diese geometrische Auffassung erwies sich in allen behandelten Fällen als hinreichend für die Entscheidung darüber, ob eine geometrische oder physikalische Größe Vektorcharakter besitzt oder nicht.

Die Zerlegung eines Vektors in Komponenten wurde verwendet einerseits zum Übergang von der formalen Vektorrechnung zur skalaren Rechnung in Koordinaten, anderseits gelegentlich zur Führung von Beweisen von Sätzen der Vektorrechnung mittels skalarer Operationen. Die Definition der gerichteten Strecke als geometrisches Objekt und ihre Unabhängigkeit vom Koordinatensystem ließ es angezeigt erscheinen, letzteres möglichst einfach zu wählen, d. h. entweder unter Benützung von Strecken und Richtungen der Figur selbst, oder als rechtwinkliges Koordinatensystem von gleichen Maßstäben. Trotz der Erkenntnis der Möglichkeit, jeden Vektor auf eine beliebige Basis zu beziehen, wurde von dieser Möglichkeit kaum je Gebrauch gemacht.

In diesem Kapitel werden nun die Vektoren grundsätzlich auf eine beliebige Basis bezogen und das Verhalten der Maßzahlen beim Übergang zu einer anderen Basis untersucht. Diese Untersuchung erweist sich als äußerst fruchtbar; sie führt zu einer *endgültigen analytischen Klarstellung des Vektorbegriffs. Zwischen einer gegebenen Transformation der Basis und der hierdurch bedingten Transformation der Maßzahlen eines Vektors*

wird ein Zusammenhang erkannt, der für die Vektoren charakteristisch ist.

Die Transformationstheorie der Vektoren führt überdies zu der Möglichkeit einer *Erweiterung des Vektorbegriffs* und zur Definition von Vektoren, die im Raum unserer Anschauung, dem *Euklidischen Raum*, im allgemeinen kein geometrisches Bild besitzen. Von dieser Möglichkeit einer Erweiterung ist im folgenden nur in ziemlich engen Grenzen Gebrauch gemacht; im nächsten Kapitel wird der Vektorbegriff und die Vektorrechnung für *krumme Flächen* und *Riemannsche Räume* entwickelt, jene gedachten Räume, welche zwar in der Umgebung eines jeden Punktes, aber nicht in endlichen Gebieten eine *Euklidische* Metrik besitzen.

210. Einführung einer neuen Basis. Ein Vektor $\mathfrak{r}$, den man sich etwa als Ortsvektor vorstellen mag, sei auf eine Basis mit den Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezogen. Seine Maßzahlen seien x^1, x^2, x^3; dabei sind 1, 2, 3 Indizes, die aus Gründen, die wir später (Ziff. 221) angeben, als *obere* Indizes geschrieben werden. Der Vektor $\mathfrak{r}$ hat also die Gestalt

$$\mathfrak{r} = x^1 \mathfrak{e}_1 + x^2 \mathfrak{e}_2 + x^3 \mathfrak{e}_3 = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i. \tag{1}$$

Nun soll eine neue Basis $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \bar{\mathfrak{e}}_3$ eingeführt werden; der Vektor nimmt dann die Gestalt

$$\mathfrak{r} = \bar{x}^1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{x}^2 \bar{\mathfrak{e}}_2 + \bar{x}^3 \bar{\mathfrak{e}}_3 = \sum_i \bar{x}^i \bar{\mathfrak{e}}_i \tag{2}$$

an; $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ *sind die neuen Koordinaten seines Endpunktes und sollen*, wenn $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \bar{\mathfrak{e}}_3$ gegeben sind, *berechnet werden*.

Da $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \bar{\mathfrak{e}}_3$ nicht komplanar sein dürfen, lassen sich zunächst die alten Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ linear durch sie ausdrücken unter Verwendung von 9 Koeffizienten c_i^k, die mit einem unteren und einem oberen Index $(i, k = 1, 2, 3)$ geschrieben werden sollen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= c_1^1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + c_1^2 \bar{\mathfrak{e}}_2 + c_1^3 \bar{\mathfrak{e}}_3 \\ \mathfrak{e}_2 &= c_2^1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + c_2^2 \bar{\mathfrak{e}}_2 + c_2^3 \bar{\mathfrak{e}}_3 \\ \mathfrak{e}_3 &= c_3^1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + c_3^2 \bar{\mathfrak{e}}_2 + c_3^3 \bar{\mathfrak{e}}_3 \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{e}_i = \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Die Koeffizienten c_i^k sind die Koordinaten der Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{e}_i$ in dem neuen System; ihre Determinante

$$c = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, da ihr Verschwinden eine lineare Beziehung zwischen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ zur Folge hätte.

Durch Einführen von (3) in (1) nimmt $\mathfrak{r}$ folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{r} = (c^1_1 x^1 + c^1_2 x^2 + c^1_3 x^3)\bar{\mathfrak{e}}_1 + (c^2_1 x^1 + c^2_2 x^2 + c^2_3 x^3)\bar{\mathfrak{e}}_2 + (c^3_1 x^1 + c^3_2 x^2 + c^3_3 x^3)\bar{\mathfrak{e}}_3;$$

somit wird nach (2)

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^1 &= c^1_1 x^1 + c^1_2 x^2 + c^1_3 x^3 \\ \bar{x}^2 &= c^2_1 x^1 + c^2_2 x^2 + c^2_3 x^3 \\ \bar{x}^3 &= c^3_1 x^1 + c^3_2 x^2 + c^3_3 x^3 \end{aligned}\right\} \bar{x}^i = \sum_k c^i_k x^k \quad (i, k) = (1, 2, 3). \tag{4}$$

Die neuen Koordinaten gehen aus den ursprünglichen durch eine lineare Transformation (4) hervor; die Transformation (4) heißt zur Transformation (3) *transponiert*; im Schema der Koeffizienten sind Zeilen und Spalten vertauscht.

Da die Transformationsdeterminante c nicht verschwindet, sind die Gleichungen (3) und (4) nach $\bar{\mathfrak{e}}_1$, $\bar{\mathfrak{e}}_2$, $\bar{\mathfrak{e}}_3$ bzw. x_1, x_2, x_3 auflösbar. Bezeichnet man (vgl. Ziff. 136) den *reduzierten*, d. h. mit der Determinante c selbst dividierten *Minor* eines Elements c^k_i in c mit $\bar{c}^i_k$, also etwa

$$\bar{c}^1_1 = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} c^2_2 & c^3_2 \\ c^2_3 & c^3_3 \end{vmatrix}; \quad \bar{c}^2_1 = -\frac{1}{c}\begin{vmatrix} c^2_1 & c^3_1 \\ c^2_3 & c^3_3 \end{vmatrix} \quad \text{usw.},$$

so gelten nach bekannten Sätzen über adjungierte Determinanten folgende Beziehungen

$$c^1_1 \bar{c}^1_1 + c^1_2 \bar{c}^2_1 + c^1_3 \bar{c}^3_1 = 1;$$
$$c^2_1 \bar{c}^1_1 + c^2_2 \bar{c}^2_1 + c^2_3 \bar{c}^3_1 = 0 \quad \text{usw.},$$

allgemein:

$$\begin{aligned} &\sum_\varrho c^i_\varrho \bar{c}^\varrho_i = 1; \\ &\sum_\varrho c^i_\varrho \bar{c}^\varrho_k = 0 \quad (i \neq k). \end{aligned} \tag{5}$$

Die Determinante der reduzierten Minoren $\bar{c}^i_k$ soll mit $\bar{c}$ bezeichnet werden:

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{c}^1_1 & \bar{c}^1_2 & \bar{c}^1_3 \\ \bar{c}^2_1 & \bar{c}^2_2 & \bar{c}^2_3 \\ \bar{c}^3_1 & \bar{c}^3_2 & \bar{c}^3_3 \end{vmatrix};$$

aus (5) folgt sofort nach dem Multiplikationssatz der Determinanten:

$$c\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{6}$$

Jetzt läßt sich die Auflösung der Gleichungen (3) sofort ausführen; multipliziert man sie der Reihe nach mit $\bar{c}_1^1$, $\bar{c}_1^2$, $\bar{c}_1^3$ und summiert, so ergibt sich

$$\bar{c}_1^1 \mathfrak{e}_1 + \bar{c}_1^2 \mathfrak{e}_2 + \bar{c}_1^3 \mathfrak{e}_3 = \bar{\mathfrak{e}}_1;$$

ähnlich $\bar{\mathfrak{e}}_2$ und $\bar{\mathfrak{e}}_3$. Die Auflösung von (3) geschieht durch die zu (3) *inverse* Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{e}}_1 &= \bar{c}_1^1 \mathfrak{e}_1 + \bar{c}_1^2 \mathfrak{e}_2 + \bar{c}_1^3 \mathfrak{e}_3 \\ \bar{\mathfrak{e}}_2 &= \bar{c}_2^1 \mathfrak{e}_1 + \bar{c}_2^2 \mathfrak{e}_2 + \bar{c}_2^3 \mathfrak{e}_3 \\ \bar{\mathfrak{e}}_3 &= \bar{c}_3^1 \mathfrak{e}_1 + \bar{c}_3^2 \mathfrak{e}_2 + \bar{c}_3^3 \mathfrak{e}_3 \end{aligned}\right| \bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_k \bar{c}_i^k \mathfrak{e}_k \quad (i, k) = (1, 2, 3). \qquad (7)$$

Ebenso geschieht die Auflösung von (4) durch die zu (4) *inverse* und zu (7) *transponierte* Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \bar{c}_1^1 \bar{x}^1 + \bar{c}_2^1 \bar{x}^2 + \bar{c}_3^1 \bar{x}^3 \\ x^2 &= \bar{c}_1^2 \bar{x}^1 + \bar{c}_2^2 \bar{x}^2 + \bar{c}_3^2 \bar{x}^3 \\ x^3 &= \bar{c}_1^3 \bar{x}^1 + \bar{c}_2^3 \bar{x}^2 + \bar{c}_3^3 \bar{x}^3 \end{aligned}\right| x^i = \sum_k \bar{c}_k^i \bar{x}^k \quad (i, k) = (1, 2, 3). \qquad (8)$$

211. Kogredienz und Kontragredienz. Die Zusammenstellung der Transformationsformeln ergibt

$$\mathfrak{e}_i = \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k; \quad \bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_k \bar{c}_i^k \mathfrak{e}_k; \qquad (9\text{a})$$

$$x^i = \sum_k \bar{c}_k^i \bar{x}^k; \quad \bar{x}^i = \sum_k c_k^i x^k. \qquad (9\text{b})$$

Man bezeichnet die *Transformation* (9b), welche die Koordinaten ineinander überführt, als *kontragredient* zu der Transformation (9a), welche die Grundvektoren ineinander überführt. Die zu einer gegebenen Transformation kontragrediente ist also invers zur transponierten Transformation. Man nennt auch die *Größensysteme* der Koordinaten und der Grundvektoren selbst zueinander kontragredient.

Allgemein nennt man jedes Größensystem, das durch dieselben Formeln wie die Grundvektoren transformiert wird, zu ihnen *kogredient*, während jedes Größensystem, das wie die Koordinaten transformiert wird, zu den Koordinaten *kogredient* und zu den Einheitsvektoren *kontragredient* heißt. Kontragredienz ist eine gegenseitige Eigenschaft; Kogredienz und Kontragredienz sind Begriffe, die erst bei Angabe eines Bezugssystems Sinn erhalten.

Um nicht immer ein Bezugssystem angeben zu müssen, bezeichnet man zu den Grundvektoren kogrediente Größen kurz als *kovariant*, zu den Grundvektoren kontragrediente Größen kurz als *kontravariant*.

Es ist gebräuchlich, kogrediente Größen durch gleiche Stellung der Indizes zu kennzeichnen, kontragrediente durch entgegengesetzte Stellung der Indizes; und zwar Grundvektoren und kovariante Größen durch untere Indizes, Koordinaten und kontravariante Größen durch obere Indizes.

Diese Regel hat bereits Anwendung gefunden bei Einführung der Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ und der Maßzahlen x^1, x^2, x^3. Man bemerkt, daß der Vektor $\mathfrak{r}$ in der Gestalt (1)

$$\mathfrak{r} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i$$

als eine Summe von Produkten entsprechender Elemente zweier zueinander kontragredienter Größensysteme erscheint.

Was die Stellung der Indizes in den Größen c_i^k betrifft, so mag, vorbehaltlich genauerer Begründung, folgende Bemerkung genügen: in allen bisher aufgetretenen Summen kommt der (variable) Summationsindex in jedem der zu summierenden Glieder in zwei Faktoren vor, und zwar einmal an unterer, einmal an oberer Stelle.

212. Koordinatentransformation und affine Abbildung. Die den Transformationsformeln (9a) und (9b) zugrundeliegende Auffassung soll noch einmal ausgesprochen werden. Der Raum, in dem die durch ihre Koordinaten gegebenen Punkte liegen, ist starr, und die gegebenen Punkte sind feste Punkte des Raumes. Ihre Lage wird durch die Koordinatentransformation nicht geändert; die Ortsvektoren sind geometrisch invariante Größen.

Geändert wird das Koordinatensystem und zwar sowohl bezüglich der Richtung der Achsen als auch der Maßstäbe auf den Achsen. Dabei ändern sich die Koordinaten von (im allgemeinen) sämtlichen im Endlichen gelegenen Punkten mit Ausnahme des festbleibenden Anfangspunktes. Aus den Transformationsformeln ist ersichtlich, daß es (mit gewissen Einschränkungen) möglich ist, die Koordinaten dreier beliebig gewählter Punkte im neuen System beliebig vorzuschreiben. Dann bestimmen sich die c_i^k durch Auflösung von 9 unhomogenen linearen Gleichungen, und damit die neue Basis.

Die geometrisch invarianten Ortsvektoren werden durch analytisch invariante Ausdrücke dargestellt:

$$\mathfrak{r} = \sum x^i \mathfrak{e}_i = \sum \bar{x}^i \bar{\mathfrak{e}}_i .$$

d. h. durch Ausdrücke, deren Aufbau durch die Transformation nicht zerstört wird, während die in ihnen auftretenden Größen sich in der durch die Transformation bestimmten Weise ändern.

Wenn man sich auf die Transformationsformeln (9b) für die Koordinaten beschränkt und die transformierten Koordinaten in dem ursprünglichen Koordinatensystem aufträgt, so erhält man eine affine Abbildung des Raumes. Jetzt kann man drei gegebenen Punkten drei beliebig gewählte Bildpunkte zuordnen, während der Anfangspunkt fest bleibt. Geometrische Beziehungen zwischen Punkten, welche durch affine Abbildungen nicht zerstört werden, also affininvariant sind, finden ihren Ausdruck in (skalaren) Gleichungen, deren Aufbau durch die Transformation (9b) der Koordinaten nicht zerstört wird. — Auch die Transformationsformeln (9a) für die Grundvektoren allein führen, wenn man die Koordinaten festhält, zur affinen Abbildung, und zwar in einer Form, die der Darstellung mittels Dyaden eng verwandt ist.

Die Gesamtheit der Koordinatentransformationen und ebenso die der affinen Abbildungen des Raumes bilden eine Gruppe.

213. Gruppe der Drehungen und Spiegelungen. In der Gruppe der Koordinatentransformationen nimmt die Untergruppe der Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems eine ausgezeichnete Stellung ein; sie ist unter der einschränkenden Voraussetzung rechtwinkliger Koordinatensysteme mit gleichen Maßstäben für alle 3 Achsen in Ziff. 9 bereits untersucht worden. Die Koordinaten werden in diesem Fall durch dieselben Formeln transformiert wie die Einheitsvektoren, und zwar durch eine orthogonale Transformation. In unserer jetzigen Bezeichnung ist

$$c_i^k = \bar{c}_k^i;$$

der Unterschied zwischen Kogredienz und Kontragredienz ist verschwunden.

Aus den Formeln Ziff. 211 (9a, b) gehen die spezielleren Formeln Ziff. 9 (23a, b) für Drehung und Spiegelung des Koordinatensystems hervor. Bezeichnet man mit

$$\mathfrak{r} = \sum_{\varrho} x_{\varrho}\, \mathfrak{i}_{\varrho} = \sum_{\varrho} \bar{x}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{i}}_{\varrho}$$

einen Vektor, bezogen auf 2 Dreibeine $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ und $\bar{\mathfrak{i}}_1, \bar{\mathfrak{i}}_2, \bar{\mathfrak{i}}_3$, und mit $\alpha_{\varrho\tau}$ die 9 Richtungswinkel der Achsen der beiden Dreibeine gegeneinander, so lassen sich diese Formeln folgendermaßen zusammen-

fassen:

$$\mathfrak{i}_\varrho = \sum_\tau \cos a_{\varrho\tau} \bar{\mathfrak{i}}_\tau; \quad \bar{\mathfrak{i}}_\varrho = \sum_\tau \cos a_{\tau\varrho} \mathfrak{i}_\tau;$$

$$x_\varrho = \sum_\tau \cos a_{\varrho\tau} \bar{x}_\tau; \quad \bar{x}_\varrho = \sum_\tau \cos a_{\tau\varrho} x_\tau.$$

Zwischen einer Koordinatentransformation und der nach der vorigen Ziffer zugeordneten affinen Abbildung besteht für die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen ein einfacher geometrischer Zusammenhang. Bei einer Drehung des Koordinatensystems bestimmt zunächst jeder feste Punkt des Raumes in jedem der beiden Koordinatensysteme ein Prisma, dessen Kanten die Maßzahlen x^1, x^2, x^3 bzw. $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ haben. Will man nun die überstrichenen Koordinaten in das ursprüngliche System eintragen, so kann das in der Weise geschehen, daß man die Drehung des Koordinatensystems rückgängig macht, dabei aber das zweite Prisma und den ganzen Raum mitnimmt. Die Gleichungen (9b) vermitteln dann eine Drehung des Raumes als Sonderfall der affinen Abbildung. Ähnlich kann man aus einer Spiegelung des Koordinatensystems eine Spiegelung des Raumes als Sonderfall der affinen Abbildung herleiten.

Drehung und Spiegelung des Raumes wird bei Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit gleichen Maßstäben durch eine orthogonale Transformation geleistet unter Aufhebung des Unterschieds zwischen Kogredienz und Kontragredienz. Dieser Satz begründet die bevorzugte Stellung der rechtwinkligen Koordinatensysteme und die Einfachheit des Rechnens mit ihnen in der metrischen Geometrie.

§ 2. Bildung von Invarianten.

214. Einführung der reziproken Basis. Die Transformationstheorie der Vektoren zeitigt weittragende Ergebnisse, wenn man neben der gegebenen (kovarianten) Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ noch die reziproke Basis $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ einführt. Die Bezeichnung der reziproken Grundvektoren durch obere Indizes findet ihre Berechtigung in dem fundamentalen Satz: Die Grundvektoren der reziproken Basis sind zu denen der gegebenen Basis kontragredient; sie bilden also ein kontravariantes Größensystem. Dieser Satz wird in der nächsten Ziffer bewiesen.

Zunächst sollen auf Grund der Ergebnisse von Ziff. 24, in welcher die Eigenschaften reziproker Grundsysteme studiert wurden,

die wichtigsten Formeln für die reziproken Grundsysteme $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ in dieser neuen Bezeichnung angeführt werden.

Die Bedingung der Reziprozität ist

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}^k = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, 3); \tag{10a}$$

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}^i = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{10b}$$

Die Grundvektoren des einen Systems lassen sich aus denen des anderen berechnen mittels der Formeln:

$$\mathfrak{e}^1 = \frac{\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3]}; \quad \mathfrak{e}^2 = \frac{\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3]}; \quad \mathfrak{e}^3 = \frac{\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3]} \tag{11a}$$

und

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathfrak{e}^2 \times \mathfrak{e}^3}{[\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}^3]}; \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{e}^3 \times \mathfrak{e}^1}{[\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}^3]}; \quad \mathfrak{e}_3 = \frac{\mathfrak{e}^1 \times \mathfrak{e}^2}{[\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}^3]}. \tag{11b}$$

Zwischen den gemischten Produkten besteht die Beziehung

$$[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3][\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}^3] = 1. \tag{12}$$

— Jeder auf die ursprüngliche Basis bezogene Vektor

$$\mathfrak{r} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i$$

mit den kontravarianten Maßzahlen x^1, x^2, x^3 kann nun auf die reziproke Basis bezogen werden. Setzt man den Satz von der Kontravarianz der reziproken Grundvektoren $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ als bewiesen voraus, so bilden die zugehörigen Maßzahlen, als zu den reziproken Grundvektoren kontragredient, ein kovariantes Größensystem; man ist also berechtigt, sie durch untere Indizes zu kennzeichnen und den Vektor $\mathfrak{r}$ in die neue Gestalt

$$\mathfrak{r} = \sum_i x_i \mathfrak{e}^i$$

zu setzen[1]).

215. Transformation reziproker Systeme. Es sollen jetzt die beiden reziproken Systeme von Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{e}^i$ durch geeignete Transformationen in zwei neue Systeme von Grundvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_i$ und $\bar{\mathfrak{e}}^i$ transformiert werden, die wieder zueinander reziprok sind. Der Vektor

$$\mathfrak{r} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i = \sum_i x_i \mathfrak{e}^i \tag{13}$$

soll durch diese Transformationen in die Formen

$$\mathfrak{r} = \sum_i \bar{x}^i \bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_i \bar{x}_i \bar{\mathfrak{e}}^i$$

1) Vielfach werden kontravariante und kovariante Vektoren unterschieden. Diese Bezeichnung und Unterscheidung ist irreführend. Jeder Vektor kann nach Wahl so geschrieben werden, daß seine Maßzahlen kontravariant oder kovariant sind. Siehe Hessenberg, l. c. S. 307.

übergeführt werden. Die Transformation für die $\mathfrak{e}_i$ soll wie in (9) durch

$$\mathfrak{e}_i = \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k \tag{14}$$

gegeben sein. Hieraus ergeben sich nach (9) die inverse Transformation und die Transformation für die Koordinaten x^i.

Dann erhält man die Transformationsformeln für das reziproke System $\mathfrak{e}^i$, x_i in folgender Weise. Multipliziert man den Vektor

$$\mathfrak{r} = \sum_k x_k \mathfrak{e}^k$$

skalar mit $\mathfrak{e}_i$, so folgt

$$x_i = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{e}_i. \tag{15a}$$

Ebenso ist

$$\bar{x}_i = \mathfrak{r} \cdot \bar{\mathfrak{e}}_i. \tag{15b}$$

(15a) wird nach (14)

$$x_i = \mathfrak{r} \cdot \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k = \sum_k c_i^k \mathfrak{r} \cdot \bar{\mathfrak{e}}_k;$$

hieraus ergibt sich nach (15b) die endgültige Transformationsformel

$$x_i = \sum_k c_i^k \bar{x}_k. \tag{16}$$

Es sind also in der Tat die Koordinaten x_i zu den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ kogredient.

Aus (16) folgen in bekannter Weise die inverse Transformation und die Transformation für die Grundvektoren $\mathfrak{e}^i$, die also zu den $\mathfrak{e}_i$ kontragredient sind.

Das v o l l s t ä n d i g e S y s t e m d e r T r a n s f o r m a t i o n s f o r m e l n, die in (9) bereits für die Transformation eines Grundsystems aufgestellt sind, ist also für zwei reziproke Grundsysteme:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_i &= \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k & \bar{\mathfrak{e}}_i &= \sum_k \bar{c}_i^k \mathfrak{e}_k, \\ x_i &= \sum_k c_i^k \bar{x}_k & \bar{x}_i &= \sum_k \bar{c}_i^k x_k; \end{aligned} \tag{17a}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}^i &= \sum_k \bar{c}_k^i \bar{\mathfrak{e}}^k & \bar{\mathfrak{e}}^i &= \sum_k c_k^i \mathfrak{e}^k, \\ x^i &= \sum_k \bar{c}_k^i \bar{x}^k & \bar{x}^i &= \sum_k c_k^i x^k. \end{aligned} \tag{17b}$$

In diesen Formeln sind die k o v a r i a n t e n, d. h. zu den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ kogredienten Größen durch u n t e r e I n d i z e s bezeichnet, die k o n t r a v a r i a n t e n, d. h. zu den $\mathfrak{e}_i$ kontragredienten Größen durch o b e r e I n d i z e s.

Damit ist der fundamentale Satz über die Transformation reziproker Grundsysteme vollständig bewiesen.

216. Übergang von einer Basis zur reziproken. Zur wirklichen Berechnung der Grundvektoren der reziproken Basis sind die For-

meln (11a) ziemlich unbrauchbar; ebenso fehlen uns noch Formeln, welche die kovarianten Maßzahlen eines mit kontravarianten Maßzahlen gegebenen Vektors zu berechnen erlauben.

Wenn die Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ die Längen (Beträge) e_1, e_2, e_3 haben und die Winkel ϑ_{12}, ϑ_{13}, ϑ_{23} miteinander bilden, sind ihre skalaren Produkte

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_i = e_i^2; \quad \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k = e_i e_k \cos \vartheta_{ik};$$

sie sollen abkürzend mit

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k = g_{ik} = g_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{18a}$$

bezeichnet werden. Die Größen g_{ii}, g_{ik} bestimmen ihrerseits die Gestalt des von den Grundvektoren gebildeten Dreikants. Damit ist auch die Gestalt des Polardreikants bestimmt; man erkennt also, daß die skalaren Produkte der reziproken Grundvektoren durch die g_{ik} bestimmt sind. Sie sollen mit

$$\mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}^k = g^{ik} = g^{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{18b}$$

bezeichnet werden; der Zusammenhang zwischen den Größensystemen g_{ik} und g^{ik} wird sich in Kürze ergeben.

Um die Gleichung

$$\sum_i x^i \mathfrak{e}_i = \sum_i x_i \mathfrak{e}^i \tag{19}$$

nach beiden Reihen von Maßzahlen aufzulösen, multipliziert man sie skalar mit $\mathfrak{e}^k$ bzw. $\mathfrak{e}_k$ und erhält

$$x^k = \sum_i g^{ik} x_i; \tag{20a}$$

$$x_k = \sum_i g_{ik} x^i. \tag{20b}$$

Das System (20b) kann auch aus (20a) durch Auflösung nach den x_i abgeleitet werden; man erkennt, daß die g_{ik} die reduzierten Minoren der Determinante der g^{ik} sind und umgekehrt. Es gelten also die Beziehungen (vgl. Ziff. 136)

$$\begin{aligned} &\sum_i g_{ik} g^{il} = 0 \quad (\text{für } k \neq l); \\ &\sum_i g_{ik} g^{ik} = 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Die g_{ik} und g^{ik} stehen in der gleichen Beziehung wie die c_i^k und $\bar{c}_k^i$ in (5).

Durch Einsetzen von (20a, b) in (19) erhält man auch den Zusammenhang zwischen beiden Reihen von Grundvektoren in der Form:

$$\mathfrak{e}^k = \sum_i g^{ik} \mathfrak{e}_i; \tag{22a}$$

$$\mathfrak{e}_k = \sum_i g_{ik} \mathfrak{e}^i. \tag{22b}$$

Diese Formeln ersetzen die unter Verwendung von Vektorprodukten geschriebenen Formeln (11) und sind für die Anwendungen geeigneter als jene. Die für skalare und vektorielle Größen ganz gleich gebauten Formelgruppen (20a, b) und (22a, b) erlauben ganz allgemein den Übergang von kovarianten Größen zu kontravarianten und umgekehrt oder, wie man häufig unter Betonung einer zwar unwesentlichen, aber charakteristischen Äußerlichkeit sagt, das Heben und Senken eines Index.

217. Metrische Fundamentalform. Die Einführung der Größen g_{ik} und g^{ik} erlaubt, skalare Produkte von Vektoren bei Zugrundelegung einer allgemeinen Basis und der reziproken Basis zu berechnen, und zwar in verschiedenen Gestalten.

Zunächst soll das skalare Produkt eines Vektors

$$\mathfrak{r} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i = \sum_i x_i \mathfrak{e}^i$$

mit sich selbst berechnet werden. Mit kontravarianten Maßzahlen erhält man

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \sum x^i \mathfrak{e}_i \cdot \sum x^k \mathfrak{e}_k$$
$$= g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2g_{23}x^2x^3 + g_{33}(x^3)^2$$

oder

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k. \tag{23a}$$

Ebenso ist mit kovarianten Maßzahlen

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \sum_{ik} g^{ik} x_i x_k. \tag{23b}$$

Endlich erhält man eine wichtige Gestalt des skalaren Produkts, wenn man den einen Faktor mit kontravarianten, den andern mit kovarianten Maßzahlen ansetzt:

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i \cdot \sum_k x_k \mathfrak{e}^k$$
$$= x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3$$

oder

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \sum_i x^i x_i. \tag{23c}$$

Man bezeichnet die für das skalare Produkt $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = r^2$ erhaltene quadratische Form als metrische Fundamentalform; sie ist in (23a, b, c) unter 3 verschiedenen Gestalten berechnet; g_{ik} und g^{ik} heißen ihre Koeffizienten oder die metrischen Fundamentalgrößen.

Bildet man jetzt das skalare Produkt zweier Vektoren

$$\mathfrak{r} = \sum x^i \mathfrak{e}_i = \sum x_i \mathfrak{e}^i,$$
$$\mathfrak{s} = \sum y^i \mathfrak{e}_i = \sum y_i \mathfrak{e}^i,$$

so führt der Ansatz

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i \cdot \sum_k y^k \mathfrak{e}_k$$

auf

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = \sum_{ik} g_{ik} x^i y^k. \tag{24a}$$

Ebenso erhält man

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = \sum_{ik} g^{ik} x_i y_k \tag{24b}$$

und

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = \sum_i x^i y_i = \sum_i x_i y^i. \tag{24c}$$

Für $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}$ ergibt sich eine bilineare Form, die Polarform der metrischen Fundamentalform, in 3 verschiedenen Gestalten (24a, b, c).

Bezeichnet man den Winkel der beiden Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ mit ϑ, so ist

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = |\mathfrak{r}|\,|\mathfrak{s}| \cos\vartheta,$$

also

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{\sqrt{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}}\,\sqrt{\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}}}. \tag{25}$$

Während eine Länge durch die metrische Fundamentalform selbst gegeben ist, erfordert die Berechnung eines Winkels noch die Hinzunahme ihrer Polarform.

Alle Ausdrücke, die mittels der metrischen Fundamentalform und ihrer Polarform gebildet werden können, sind metrische Invarianten.

Man darf nicht übersehen, daß bei einer allgemeinen Transformation des Koordinatensystems die g_{ik} ihre Werte ändern; das ist geometrisch selbstverständlich und der analytische Ausdruck der Tatsache, daß das skalare Produkt nicht affin invariant ist. Nur bei Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems bleiben die g_{ik} unverändert. — Bei allgemeinen Transformationen macht die gleichzeitige Verwendung zweier reziproker Grundsysteme, also die Anwendung der Formeln (23c) und (24c), von den g_{ik} frei.

218. Invarianter Ausdruck für die Arbeit einer Kraft. Die einfachste mechanische Anwendung des skalaren Produkts ist bekanntlich (Ziff. 7) die Berechnung der Arbeit einer Kraft. Setzt man den Vektor der Verschiebung des Angriffspunkts

$$\mathfrak{S} = \sum_i x^i \mathfrak{e}_i$$

mit kontravarianten Maßzahlen, den Vektor der Kraft

$$\mathfrak{K} = \sum_i y_i \mathfrak{e}^i$$

mit kovarianten Maßzahlen an, so erhält man für die Arbeit den invarianten Ausdruck

$$A = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{S} = \sum_i x^i y_i. \tag{26}$$

Geometrisch kommt die Verwendung der reziproken Grundsysteme auf eine Zerlegung der Kraft in drei Komponenten hinaus, deren jede (z. B. $y_1 \mathfrak{e}^1$) auf zwei Verschiebungskomponenten ($x^2 \mathfrak{e}_2$ und $x^3 \mathfrak{e}_3$) senkrecht steht, also nur bei Verschiebung in Richtung der dritten Komponente ($x^1 \mathfrak{e}_1$) Arbeit leistet.

219. Invarianten. Die gemeinsame Behandlung der Transformation zweier reziproker Grundsysteme zeigt ganz allgemein den Weg zur Aufstellung invarianter Ausdrücke.

Bilden 3 Größen α^i ein kontravariantes, 3 Größen β_i ein kovariantes System, ganz gleichgültig, ob von Skalaren oder Vektoren oder auch extensiven Größen höherer Art, so ist $\sum_i \alpha^i \beta_i$ eine Invariante. Nach den Transformationsformeln (17)

$$\alpha^i = \sum_k \bar{c}^i_k \bar{\alpha}^k,$$

$$\beta_i = \sum_k c^k_i \bar{\beta}_k$$

ist nämlich

$$\sum_i \alpha^i \beta_i = \sum_{ikl} \bar{c}^i_k c^l_i \bar{\alpha}^k \bar{\beta}_l$$

oder wegen der Definition der $\bar{c}^i_k$ als reduzierte Minoren der Determinante der c^k_i [Ziff. 210 (5)]

$$\sum_i \alpha^i \beta_i = \sum_i \bar{\alpha}^i \bar{\beta}_i. \tag{27}$$

— So wurde das skalare Produkt zweier Vektoren

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s} = \sum x^i y_i = \sum x_i y^i \tag{28}$$

als Invariante erkannt; auch der Vektor selbst

$$\mathfrak{r} = \sum x^i \mathfrak{e}_i = \sum x_i \mathfrak{e}^i \tag{29}$$

ist definitionsgemäß eine vom Koordinatensystem unabhängige, also invariante Größe.

220. Metrische Fundamentaldyade. In derselben Weise wie die skalare Invariante (28) und die vektorielle Invariante (29) lassen sich dyadische Invarianten bilden. So ist

$$I = \sum_i \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_i \quad \text{oder auch} \quad I = \sum_i \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^i \tag{30}$$

nichts anderes als die Dyade „Eins“.

In der Tat unterscheiden sich die Ausdrücke (30) von dem in Ziff. 33 gefundenen Ausdruck

$$I = \mathfrak{a}^* \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^* \mathfrak{b} + \mathfrak{c}^* \mathfrak{c}$$

nur durch die Bezeichnung.

Führt man in (30) beide Reihen von Faktoren auf die gleiche Basis zurück mittels der Formeln (22a, b), so erhält man für die Dyade I die Ausdrücke

$$I = \sum_{ik} g^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k, \tag{31 a}$$

$$I = \sum_{ik} g_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k. \tag{31 b}$$

Die gefundenen Gestalten der Dyade I entsprechen durchaus den 3 Gestalten (23a, b, c) der metrischen Fundamentalform. Sie enthalten die metrischen Fundamentalgrößen als Maßzahlen; die Koordinaten sind durch Vektoren ersetzt. Wegen dieser Beziehung wird die Dyade Eins als metrische Fundamentaldyade bezeichnet.

221. Größen mit mehreren Indizes. Die Erkenntnis, daß jeder Ausdruck von der Form $\sum_i \alpha^i \beta_i$ eine Invariante ist, ermöglicht es, die Regel über die Stellung der Indizes in Größen mit mehreren Indizes endgültig zu begründen. Bisher wurde die Ziff. 211 aufgestellte Richtlinie eingehalten, daß bei der Bildung aller Summen, in deren sämtlichen Gliedern der Summationsindex zweimal auftritt, dieser Index einmal an oberer, einmal an unterer Stelle stehen soll. Es ist leicht einzusehen, daß diese Richtlinie eine Folge der Festsetzung ist, die über die Unterscheidung kovarianter und kontravarianter Größen getroffen wurde.

So kann, um das an einem typischen Beispiel zu zeigen, jede Dyade in die Form

$$\Phi = \sum_k \mathfrak{A}^k \mathfrak{e}_k$$

gesetzt werden, wenn als Rechtsfaktoren die kovarianten Grundvektoren $\mathfrak{e}_k$ gewählt werden; die Linksfaktoren $\mathfrak{A}^k$ sind dann wegen der Invariantennatur der Dyade kontravariant. Bezogen auf die kovariante Basis kann man jeden der drei Vektoren $\mathfrak{A}^k$ in die Form

$$\mathfrak{A}^k = \sum_i a^{ik} \mathfrak{e}_i \quad (k = 1, 2, 3)$$

setzen. In jedem dieser Vektoren haben die Maßzahlen a^{ik} einen festen Index k, während sie bezüglich des Summationsindex i kontragredient zu den $\mathfrak{e}_i$, also kontravariant

sind. Wenn also die Dyade in der Gestalt

$$\Phi = \sum_{ik} a^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k \tag{32a}$$

geschrieben wird, so transformieren sich die Maßzahlen a^{ik} für i als variablen Index bei irgendeiner Transformation der linken Faktoren $\mathfrak{e}_i$ kontragredient zu diesen, während das gleiche für k als variablen Index bei einer Transformation der rechten Faktoren $\mathfrak{e}_k$ gilt.

Diese Betrachtungen lassen sich auf Dyaden von anderer Gestalt, etwa

$$\Psi = \sum_{ik} a_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k \tag{32b}$$

oder

$$X = \sum_{ik} a_i^k \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k \tag{32c}$$

sowie auf Tensoren höherer als 2. Stufe mit Maßzahlen mit mehr als 2 Indizes sinngemäß übertragen. Die Maßzahlen der Dyade (32c) werden als gemischtvariant bezeichnet.

222. Verschiedene Gestalten einer Dyade. Eine Dyade mit gemischtvarianten Maßzahlen

$$X = \sum_{ik} a_i^k \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k \tag{33}$$

kann, wie das im besonderen Fall der Dyade Eins bereits gezeigt wurde, vollständig auf die kovariante oder kontravariante Basis bezogen werden. Im ersten Fall ist zufolge (22a) nach einer Änderung der Bezeichnung der Indizes

$$X = \sum_{ikl} a_i^k g^{il} \mathfrak{e}_l \mathfrak{e}_k = \sum_{ikl} a_l^k g^{il} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k.$$

Setzt man dafür abkürzend

$$X = \sum_{ik} a^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k, \tag{33a}$$

so ist

$$a^{ik} = \sum_l a_l^k g^{il}.$$

Durch diese Gleichung wird der untere Index von a_i^k gehoben. Die Maßzahlen a^{ik} sind zweifach kontravariant. Beim Vergleich von (33) und (33a) erkennt man, daß der Index i in Maßzahl und Vektor seine Stellung geändert hat.

Im zweiten Fall ist nach (22b)

$$X = \sum a_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k, \tag{33b}$$

wo

$$a_{ik} = \sum_l a_i^l g_{kl}$$

ist; durch diese Gleichung wird der obere Index von a_i^k gesenkt.

Geht man von der Dyade (32a)

$$\Phi = \sum_{ik} a^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k$$

mit zweifach kontravarianten Maßzahlen aus, so kann man zwei verschiedene gemischtvariante Gestalten herstellen, je nachdem man mit den Linksfaktoren $\mathfrak{e}_i$ oder mit den Rechtsfaktoren $\mathfrak{e}_k$ zur kontravarianten Basis übergeht, also den ersten oder zweiten Index von a^{ik} senkt:

$$\Phi = \sum_{ik} a_{i\cdot}^{\cdot k} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k; \quad a_{i\cdot}^{\cdot k} = \sum_l a^{lk} g_{il}; \tag{34a}$$

$$\Phi = \sum_{ik} a^{k\cdot}_{\cdot i} \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}^i; \quad a^{k\cdot}_{\cdot i} = \sum_l a^{kl} g_{li}. \tag{34b}$$

Diese beiden Gestalten müssen im allgemeinen auseinander gehalten werden; nur für eine symmetrische Dyade Φ ist

$$a_{i\cdot}^{\cdot k} = a^{k\cdot}_{\cdot i}.$$

Eine Dyade ist durch ihre Maßzahlen nur dann eindeutig bestimmt, wenn man festsetzt, daß die Grundvektoren in der Reihenfolge aufeinander folgen, die durch die Indizes der Maßzahlen festgelegt ist; bei gemischtvarianten Maßzahlen ist diese Reihenfolge nur dadurch mit Sicherheit festzulegen, daß man den oberen Indizes Lücken in der unteren Reihe gegenüberstellt und umgekehrt. Aus diesem Grunde ist eine Dyade (allgemeiner ein Tensor $n$ter Stufe) durch ihre Maßzahlen nur unvollständig bestimmt, während sie durch Angabe einer in den Grundvektoren homogenen Form eindeutig bestimmt ist.

223. Transformation einer Dyade. Die Transformation einer Dyade auf eine neue Basis soll nun für das Beispiel (32a) wirklich durchgeführt und die Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ in beiden Reihen von Faktoren mittels der Formeln (9)

$$\mathfrak{e}_i = \sum_k c_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k$$

durch $\bar{\mathfrak{e}}_1$, $\bar{\mathfrak{e}}_2$, $\bar{\mathfrak{e}}_3$ ersetzt werden. Dann wird

$$\Phi = \sum_{ik} a^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k = \sum_{ik\varrho\sigma} a^{ik} c_i^\varrho \bar{\mathfrak{e}}_\varrho c_k^\sigma \bar{\mathfrak{e}}_\sigma = \sum_{ik\varrho\sigma} a^{ik} c_i^\varrho c_k^\sigma \bar{\mathfrak{e}}_\varrho \bar{\mathfrak{e}}_\sigma;$$

setzt man hierfür abkürzend

$$\Phi = \sum_{\varrho\sigma} \bar{a}^{\varrho\sigma} \bar{\mathfrak{e}}_\varrho \bar{\mathfrak{e}}_\sigma,$$

so kann man die Transformationsformeln für die Maßzahlen der Dyade ablesen:

$$\bar{a}^{\varrho\sigma} = \sum_{ik} a^{ik} c_i^\varrho c_k^\sigma. \tag{35}$$

Ist die Dyade Φ auf ein Dreibein $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$ bezogen und geht man durch Drehung oder Spiegelung zu einem neuen Dreibein $\bar{\mathfrak{i}}_1$, $\bar{\mathfrak{i}}_2$, $\bar{\mathfrak{i}}_3$ über, so erhält man Transformationsformeln für die Maßzahlen, die aus den eben abgeleiteten durch Spezialisierung erhalten werden können; dabei verschwindet der Unterschied zwischen Ko- und Kontragredienz.

Die Formeln für die Transformation der Einheitsvektoren können [Ziff. 213] folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\mathfrak{i}_\varrho = \sum_\tau \cos \alpha_{\varrho\tau} \bar{\mathfrak{i}}_\tau,$$

wenn mit $\alpha_{\varrho\tau}$ die 9 Richtungswinkel der Achsen der beiden Dreibeine gegeneinander bezeichnet sind; dann geht die Dyade

$$\Phi = \sum_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma} \mathfrak{i}_\varrho \mathfrak{i}_\sigma \tag{36}$$

über in

$$\Phi = \sum_{\varrho\sigma\tau\omega} a_{\varrho\sigma} \cos \alpha_{\varrho\tau} \cos \alpha_{\sigma\omega} \bar{\mathfrak{i}}_\tau \bar{\mathfrak{i}}_\omega;$$

und wenn man abkürzend die transformierte Dyade

$$\Phi = \sum \bar{a}_{\tau\omega} \bar{\mathfrak{i}}_\tau \bar{\mathfrak{i}}_\omega$$

schreibt, werden die Transformationsformeln für die Maßzahlen

$$a_{\tau\omega} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma} \cos \alpha_{\varrho\tau} \cos \alpha_{\sigma\omega}. \tag{37}$$

Diese Gleichungen sind von manchen Autoren zur Definition der Dyaden verwendet worden.

224. Transformation der Vektorprodukte. Die Transformationstheorie erlaubt, über den Invariantencharakter des Vektorprodukts, dessen merkwürdiges Verhalten bei einer Spiegelung des rechtwinkligen Koordinatensystems bereits (Ziff. 17) besprochen wurde, vollständigen Aufschluß zu erhalten.

Gegeben seien, bezogen auf eine kovariante Basis, drei Vektoren

$$\mathfrak{A} = \sum x^i \mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{B} = \sum y^i \mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{C} = \sum z^i \mathfrak{e}_i.$$

Das Vektorprodukt der beiden letzteren ist

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \sum y^k \mathfrak{e}_k \times \sum z^l \mathfrak{e}_l = \sum (y^k z^l - y^l z^k) \mathfrak{e}_k \times \mathfrak{e}_l$$

oder bei Einführung kontragredienter Grundvektoren $\mathfrak{e}^i = \frac{\mathfrak{e}_k \times \mathfrak{e}_l}{[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3]}$ nach (11):

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = [\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3] \begin{vmatrix} \mathfrak{e}^1 & \mathfrak{e}^2 & \mathfrak{e}^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \tag{38}$$

Das gemischte Produkt der 3 Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_3] \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Die Determinante der Koordinaten gibt also im allgemeinen nicht das Volumen des von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmten Prismas, sondern sie ist die Maßzahl dieses Volumens, gemessen durch das Prisma der Grundvektoren. Speziell ist bei Einführung einer neuen Basis $\bar{\mathfrak{e}}_i$ nach (7)

$$[\bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_2 \bar{\mathfrak{e}}_3] = [\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3]\, \bar{c} \tag{40}$$

und also nach (39)

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \bar{c} \begin{vmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 \\ \bar{y}^1 & \bar{y}^2 & \bar{y}^3 \\ \bar{z}^1 & \bar{z}^2 & \bar{z}^3 \end{vmatrix}, \tag{41}$$

wie auch aus (8) direkt erkannt werden kann.

Um in ähnlicher Weise das in (38) berechnete Vektorprodukt $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ auf beide Grundsysteme $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ und $\bar{\mathfrak{e}}^1$, $\bar{\mathfrak{e}}^2$, $\bar{\mathfrak{e}}^3$ beziehen zu können, sollen abkürzend die Minoren der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{Vmatrix}$$

mit $X_{[1]}$, $X_{[2]}$, $X_{[3]}$ bezeichnet werden, und entsprechend für das überstrichene System.

Dann ist

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = [\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_2] \sum \mathfrak{e}^i X_{[i]} = [\bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_2 \bar{\mathfrak{e}}_3] \sum \bar{\mathfrak{e}}^i \bar{X}_{[i]};$$

es werden also, da die $\mathfrak{e}^i$ kontravariant sind, die Größen $[\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3] X_{[i]}$ durch die kovariante Transformation in die $[\bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_2 \bar{\mathfrak{e}}_3] \bar{X}_{[i]}$ übergeführt. Die $X_{[i]}$ selbst sind nicht kovariant; aus diesem Grunde wurden die Indizes von vornherein in Klammern gesetzt. Zufolge der Gleichungen (40) und (41) sind jedoch die Größen $\frac{X_{[i]}}{D}$ bzw. $\frac{\bar{X}_{[i]}}{\bar{D}}$ wieder kovariant, wenn D und $\bar{D}$ die Determinanten der kontravarianten Maßzahlen dreier beliebiger Vektoren in beiden Systemen sind.

Vielfach werden, namentlich bei Verwendung rechtwinkliger Koordinatensysteme, Vektoren, die bei der Bildung eines Vektorprodukts auftreten, deren Koordinaten also die zweireihigen Determinanten aus den Koordinaten zweier Vektoren sind, als „a x i a l e" Vektoren bezeichnet und von den ursprünglichen „p o l a r e n" Vektoren unterschieden, weil sie sich beim Übergang zu einem

Linkssystem anders verhalten (vgl. Ziff. 17). Die Ursache ist jetzt bei Verwendung einer allgemeinen Basis völlig klar geworden. Nur die mit $[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3]$ (das für ein Dreibein den Wert ± 1 hat und bei einer Spiegelung sein Zeichen wechselt), multiplizierten Determinanten der kontravarianten Maßzahlen zweier Vektoren sind kovariante Maßzahlen eines Vektors. Ein axialer Vektor mit derart reduzierten Koordinaten unterscheidet sich in keiner Weise von einem polaren Vektor, während ein axialer Vektor mit nicht reduzierten Koordinaten auf die Bezeichnung Vektor transformationstechnisch überhaupt keinen Anspruch hat.

— Die dem Vektorprodukt $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$ anhaftenden Schwierigkeiten entfallen für die antisymmetrische Dyade $\mathfrak{C}\mathfrak{B}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, die, wie bereits (Ziff. 34 u. 140) auseinandergesetzt, zur Darstellung der von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmten Plangröße ebenso verwendet werden kann wie das Vektorprodukt.

§ 3. Die einfachsten Differentialinvarianten.

225. Invarianz von ∇. Bei Einführung einer allgemeinen Basis von kovarianten Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ und kontravarianter Maßzahlen dx^1, dx^2, dx^3 nimmt der infinitesimale Ortsvektor die Gestalt

$$d\mathfrak{r}=\mathfrak{e}_1\,dx^1+\mathfrak{e}_2\,dx^2+\mathfrak{e}_3\,dx^3$$

an. Dann kann die Änderung einer skalaren Feldfunktion V bei einer Verschiebung des Aufpunkts um $d\mathfrak{r}$, nämlich

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial V}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial V}{\partial x^3}dx^3,$$

unter Benutzung auch der reziproken Basis $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ wie bei Verwendung rechtwinkliger Koordinaten als skalares Produkt geschrieben werden (vgl. Ziff. 73):

$$dV=\left(\mathfrak{e}^1\frac{\partial V}{\partial x^1}+\mathfrak{e}^2\frac{\partial V}{\partial x^2}+\mathfrak{e}^3\frac{\partial V}{\partial x^3}\right)\cdot(\mathfrak{e}_1\,dx^1+\mathfrak{e}_2\,dx^2+\mathfrak{e}_3\,dx^3).$$

Der erste Faktor

$$\mathfrak{e}^1\frac{\partial V}{\partial x^1}+\mathfrak{e}^2\frac{\partial V}{\partial x^2}+\mathfrak{e}^3\frac{\partial V}{\partial x^3}=\nabla V$$

ist der Gradient von V. Es sind also $\frac{\partial V}{\partial x^1}$, $\frac{\partial V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial V}{\partial x^3}$ seine kovarianten Maßzahlen; dann erscheint

$$\nabla=\mathfrak{e}^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\mathfrak{e}^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\mathfrak{e}^3\frac{\partial}{\partial x^3}=\sum_i\mathfrak{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (42\,\mathrm{a})$$

als formaler Vektor mit formalen kovarianten Maßzahlen $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$.

Es transformieren sich die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$ kontragredient zu den Differentialen dx^1, dx^2, dx^3. Das Auftreten einer Reihe von oberen Indizes im Nenner ist also transformationstechnisch gleichbedeutend mit dem Auftreten einer Reihe von unteren Indizes im Zähler. Entsprechendes gilt, wenn man von vornherein obere und untere Indizes vertauscht und ∇ in die Gestalt

$$\nabla = \mathfrak{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \mathfrak{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{42b}$$

bringt.

Es führt eine als kovariant bezeichnete Transformation

$$\mathfrak{e}_i \text{ in } \bar{\mathfrak{e}}_i, \quad dx_i \text{ in } d\bar{x}_i, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ in } \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$$

über, während die kontravariante Transformation

$$\mathfrak{e}^i \text{ in } \bar{\mathfrak{e}}^i, \quad dx^i \text{ in } d\bar{x}^i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ in } \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$$

überführt. Bei diesen Transformationen bewahrt ∇ seine Gestalt:

$$\nabla = \mathfrak{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \bar{\mathfrak{e}}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + \bar{\mathfrak{e}}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} + \bar{\mathfrak{e}}_3 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3},$$

bzw.

$$\nabla = \mathfrak{e}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathfrak{e}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathfrak{e}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \bar{\mathfrak{e}}^1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} + \bar{\mathfrak{e}}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\mathfrak{e}}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^3}.$$

Aus der Kovarianz der Symbole $\frac{\partial}{\partial x^k}$ und der Kontravarianz der Symbole $\frac{\partial}{\partial x_k}$ folgt, daß beim Übergang von einer Basis zur reziproken für die Transformation dieser Symbole folgende Gleichungen gelten [vgl. Ziff. 216 (20)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \sum_l g_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l}, \\ \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_l g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l}. \end{aligned} \tag{43}$$

Bei Verwendung rechtwinkliger Koordinaten und einer Basis von drei zueinander senkrechten Einheitsvektoren transformieren sich die Differentiationssymbole wie die Differentiale. In diesem Fall wird

$$\nabla = \mathfrak{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial z} = \bar{\mathfrak{i}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathfrak{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + \bar{\mathfrak{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

226. Divergenz und Rotation bezogen auf eine beliebige Basis. Die Transformation von ∇ auf eine beliebige Basis erlaubt, auch die Differentialinvarianten eines Vektors

$$\mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}_i v^i,$$

vor allem div $\mathfrak{v}$ und rot $\mathfrak{v}$, für eine beliebige Basis zu berechnen.

Je nachdem man dabei ∇ in der Gestalt (42a) oder (42b) nimmt, erhält man auch für die Differentialinvarianten verschiedene Gestalten. So ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \cdot \mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \sum_k \mathfrak{e}_k v^k = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}; \qquad (44\,\text{a})$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \cdot \mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_k \mathfrak{e}_k v^k = \sum_{ik} g_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x_i}. \qquad (44\,\text{b})$$

Für rot $\mathfrak{v}$ soll nur eine Gestalt angegeben werden:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \times \sum \mathfrak{e}_l v^l = [\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3] \begin{vmatrix} \mathfrak{e}^1 & \mathfrak{e}^2 & \mathfrak{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \qquad (45)$$

Bei der Ausführung der Differentiationen ist vorausgesetzt, daß die Basis für alle Vektoren des ganzen Feldes gelten soll. Die Möglichkeit, daß die Grundvektoren selbst für jeden Aufpunkt andere sind, also ein Feld bilden, und daß der Feldvektor und alle anderen Feldgrößen in jedem Aufpunkt auf die zu dem Aufpunkt gehörige Basis bezogen werden müssen, besteht (vgl. Ziff. 130, 131) und wird später allgemein behandelt (Kap. 7). Als eine veränderliche Basis könnte bereits das System der drei Einheitsvektoren im begleitenden Dreibein aufgefaßt werden (Ziff. 62, 63).

§ 4. Mechanische Anwendungen.

227. Vorbemerkung. Zu denjenigen Gebieten der Mechanik, in denen die Verwendung schiefwinkliger Koordinatensysteme oft naturgemäß und kaum vermeidbar ist, gehört die Theorie der infinitesimalen Verzerrungen und der zugehörigen elastischen Spannungszustände.

Wenn etwa aus einem deformierbaren Medium ein nicht rechtwinkliges Parallelepiped herausgeschnitten und bei irgendeiner Untersuchung über Verzerrungs- oder Spannungszustände zugrunde gelegt wird, liegt es nahe, zwei verschiedene Koordinatensysteme zu verwenden; eines, dessen Achsen in die Kanten des Parallel-

epipeds fallen, und ein zweites, dessen Kanten auf den Seitenflächen des Parallelepipeds senkrecht stehen. Bei geeigneter Wahl der Maßstäbe wird man hierdurch zu reziproken Grundsystemen geführt. Die verschiedenen geometrischen und mechanischen Größen, welche in der Theorie der elastischen Verzerrungen eine Rolle spielen, verteilen sich ganz von selbst auf die beiden Koordinatensysteme, wenn man bestrebt ist, möglichst einfache Ausdrücke zu erhalten und die Einführung der metrischen Fundamentalgrößen g_{ik} zu vermeiden. —

Die folgenden Untersuchungen schließen an Kap. 5 § 2, 3 und 4 an.

228. Die Verzerrungskoeffizienten. In einem deformierbaren Medium soll die Umgebung eines Punktes auf eine beliebige Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezogen werden, deren Grundvektoren nur der Bedingung genügen, daß sie Einheitsvektoren sind. Hierin liegt keine erhebliche Beschränkung; jede Basis kann durch eine einfache Änderung des Maßstabes dieser Bedingung unterworfen werden. Die reziproke Basis $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \mathfrak{e}^3$ wird dann nicht von Einheitsvektoren gebildet.

Der infinitesimale Ortsvektor wird auf die Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezogen

$$d\mathfrak{r} = \sum_i dx^i \mathfrak{e}_i:$$

die Deformationsdyade soll, bezogen auf die reziproke Basis, mit

$$\varepsilon = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k \tag{46}$$

angesetzt werden. Dann wird die Deformation, auf die reziproke Basis bezogen

$$d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r} \cdot \varepsilon = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} dx^i \mathfrak{e}^k;$$

die Maßzahlen von $d\mathfrak{v}$ sind kovariant; setzt man $d\mathfrak{v} = \sum_k dv_k \mathfrak{e}^k$, so ist

$$dv_k = \sum_i \varepsilon_{ik} dx^i.$$

Um die Bedeutung der ε_{ik} zu erkennen, multipliziert man (46) skalar mit zwei gleichen oder verschiedenen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k$; es ergibt sich

$$\varepsilon_{ii} = \mathfrak{e}_i \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e}_i;$$
$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} = \mathfrak{e}_i \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e}_k \quad (i \neq k).$$

Nach Ziff. 184 (49) sind ε_{ii} die Dilatationen in Richtung der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i$; nach Ziff. 184 (50) ergeben sich aus ε_{ik} die Ausweitungen der Winkel $(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k)$.

229. Die Spannungskomponenten. Bezogen auf die Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, die wieder der Bedingung genügen soll, daß $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ Einheitsvektoren sind, und auf die reziproke Basis $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$, soll der Einheitsvektor der Normalen eines Flächenelements mit

$$\mathfrak{n} = \sum_i n^i \mathfrak{e}_i,$$

und die Spannungsdyade mit

$$\sigma = \sum_{ik} \sigma_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k \tag{47}$$

angesetzt werden. Dann wird die zur Richtung $\mathfrak{n}$ gehörige reduzierte Spannung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cdot \sigma = \sum_{ik} \sigma_{ik} n^i \mathfrak{e}^k;$$

die Maßzahlen von $\mathfrak{p} = \sum_k p_k \mathfrak{e}^k$:

$$p_k = \sum_i \sigma_{ik} n^i$$

sind kovariant; es war schon früher (Ziff. 218) davon die Rede, daß diese Darstellungsweise für Kräfte von Vorteil ist.

Um die Bedeutung der σ_{ik} zu erkennen, berechnet man die Spannungen, die an den Ebenen des Dreikants der kontravarianten Basis angreifen; d. h. an den Ebenen, die auf den Grund- (Einheits-) Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ der kovarianten Basis senkrecht stehen:

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{e}_i} = \mathfrak{e}_i \cdot \sigma = \sum_k \sigma_{ik} \mathfrak{e}^k. \tag{48}$$

Diese Spannungen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{e}_i}$ erscheinen zerlegt in Komponenten in Richtung der Grundvektoren der kontravarianten Basis; σ_{ik} sind ihre Maßzahlen. Von den Komponenten $\sigma_{ik} \mathfrak{e}^k$ einer Spannung $\mathfrak{p}_{\mathfrak{e}_i}$ fallen zwei ($k \neq i$) in die auf $\mathfrak{e}_i$ senkrechte Angriffsebene, sind also Schubspannungen, während jedoch die dritte $\sigma_{ii} \mathfrak{e}^i$ keine Normalspannung ist. Durch skalare Multiplikation von (48) mit $\mathfrak{e}_k$ erhält man die σ_{ik} selbst:

$$\sigma_{ik} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{e}_i} \cdot \mathfrak{e}_k;$$

sie sind die Projektionen der Spannungen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{e}_i}$ auf die Richtungen $\mathfrak{e}_k$ der kovarianten Basis. —

Um die Gleichgewichtsbedingung [Ziff. 196 (75)] in einfacher skalarer Form zu erhalten, bezieht man die Kraft $\mathfrak{K}$ ebenso wie σ auf die kontravariante Basis:

$$\mathfrak{K} = \sum_k X_k \mathfrak{e}^k,$$

und ∇ auf die kovariante Basis:

$$\nabla = \sum_i \mathfrak{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i};$$

dann wird die Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum_k \varrho X_k \mathfrak{e}^k + \sum_i \mathfrak{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_{ik} \sigma_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k = 0$$

oder

$$\sum_k \left[\varrho X_k + \sum_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i}\right] \mathfrak{e}^k = 0; \tag{49}$$

sie zerfällt in 3 skalare Gleichungen, die genau so gebildet sind wie die Gleichungen [Ziff. 197 (82)] für rechtwinklige Koordinaten:

$$\varrho X_k + \sum_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = 0. \tag{49'}$$

230. Hookesches Gesetz. Als Ausdruck des allgemeinen Hookeschen Gesetzes wurde [Ziff. 203 (92)] die Gleichung

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\varepsilon_{\mathrm{I}} I$$

gefunden. Setzt man unter Verwendung einer allgemeinen Basis $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2$, $\mathfrak{e}^3$ wie in Ziff. 228 (46) und 229 (47)

$$\sigma = \sum_{ik} \sigma_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k,$$

$$\varepsilon = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k$$

und

$$I = \sum_{ik} g_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k,$$

so zerfällt das Hookesche Gesetz in die 6 skalaren Gleichungen

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\varepsilon_{\mathrm{I}} g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3); \tag{50}$$

dabei ist zu bemerken, daß

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} \mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}^k = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} g^{ik}$$

ist.

Etwas einfachere Gleichungen erhält man, wenn man unter Verwendung gemischtvarianter Maßzahlen σ_i^k und ε_i^k, die allerdings keinen ganz so einfachen Sinn haben wie σ_{ik} und ε_{ik}, die Dyaden in der Gestalt

$$\sigma = \sum_{ik} \sigma_i^k \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k,$$

$$\varepsilon = \sum_{ik} \varepsilon_i^k \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_k,$$

$$I = \sum_i \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_i$$

ansetzt. Dann zerfällt das Hookesche Gesetz in die skalaren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i^i &= 2\mu\varepsilon_i^i + \lambda\varepsilon_{\mathrm{I}}, \\ \sigma_i^k &= 2\mu\varepsilon_i^k \quad (i \neq k); \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

dabei ist

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \sum_{ik} \varepsilon_i^k \mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}_k = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3. \tag{52}$$

Die für gemischtvariante Maßzahlen gebildeten Gleichungen (51) und (52) sind genau so aufgebaut wie die für rechtwinklige Koordinaten.

231. Elastisches Potential. Als elastisches Potential wurde Ziff. 207 (98) der Ausdruck

$$\Pi = \frac{1}{2} \sigma \cdot\cdot \varepsilon$$

gefunden. Setzt man beide Dyaden σ und ε mit kovarianten Maßzahlen an [(47) und (46)]:

$$\sigma = \sum_{ik} \sigma_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k; \quad \varepsilon = \sum_{lm} \varepsilon_{lm} \mathfrak{e}^l \mathfrak{e}^m,$$

so wird

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \sigma_{ik} \varepsilon_{lm} g^{im} g^{kl}; \tag{53a}$$

günstigere Ausdrücke erhält man, wenn man eine der beiden Dyaden mit kontravarianten oder beide mit gemischtvarianten Maßzahlen ansetzt. Diese Ausdrücke können auch direkt aus (53a) durch zweimaliges Heben eines Index abgeleitet werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{ikl} \sigma_{ik} \varepsilon_l^i g^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \sigma_{ik} \varepsilon^{ik} \tag{53b}$$

oder

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{ikl} \sigma_{ik} \varepsilon_l^i g^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{il} \sigma_i^l \varepsilon_l^i. \tag{53c}$$

Kapitel 7. Vektoren im Riemannschen Raum.

§ 1. Vektoren in einem Punkt eines Riemannschen Raumes.

232. Vektoren in einer Fläche. Geometrische Größen, die in einem Punkt einer Fläche definiert sind, können dann als Vektoren in der Fläche oder als Vektoren der Fläche bezeichnet werden, wenn für ihre Zusammensetzung dieselben Gesetze gelten wie für die Addition der Vektoren im gewöhnlichen („Euklidischen") dreidimensionalen Raum. Jedenfalls kann man die gerichteten Linienelemente, die in einer Fläche von einem Punkt P ausgehen und die infinitesimale Vektoren des überlagerten dreidimensionalen Euklidischen Raumes sind, als infinitesimale Vektoren in der Fläche einführen. Für ihre Zusammensetzung gelten in einer kleinen, als eben zu betrachtenden Umgebung von P die Gesetze der Addition der Vektoren. Man kann daher jeden von einem Punkt P ausgehenden infinitesimalen Vektor $d\mathfrak{s}$ der Fläche in Komponenten nach zwei vorgegebenen Richtungen in der Fläche zerlegen:

$$d\mathfrak{s} = d_1\mathfrak{s} + d_2\mathfrak{s}. \tag{1}$$

Führt man in der Fläche zwei Scharen von Gaußschen Parameterkurven $u^{(1)} = \text{const}$, $u^{(2)} = \text{const}$ ein, so läßt sich der Vektor $d\mathfrak{s}$ als Änderung eines Ortsvektors im Raum in die Form

$$d\mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2} du^2 \tag{2}$$

bringen. Dann sind

$$d_1\mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1} du^1; \quad d_2\mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2} du^2$$

die infinitesimalen Komponenten von $d\mathfrak{s}$.

$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1}$ und $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2}$ sind endliche Vektoren der Fläche, die aus $d_1\mathfrak{s}$ und $d_2\mathfrak{s}$ durch Übergang vom Differential zum Differentialquotienten entstehen. Führt man

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1} = \mathfrak{e}_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2} = \mathfrak{e}_2$$

als Grundvektoren einer Basis ein, so nimmt $d\mathfrak{s}$ die Gestalt

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_1 du^1 + \mathfrak{e}_2 du^2 \tag{3}$$

an. Die Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ gilt nur für die Vektoren, die von einem Punkt P ausgehen. Es ist jedenfalls nicht möglich, die sämtlichen Vektoren eines endlichen Gebietes einer Fläche auf ein und dieselbe Basis in der Fläche zu beziehen.

Um einen endlichen Vektor der Fläche zu versinnbildlichen, kann man etwa auf der geodätischen Linie, die durch P in Richtung des zugehörigen infinitesimalen Vektors geht, eine Strecke abtragen, deren Länge gleich dem Betrag des Vektors ist, wie es sich für Vektoren der Kugel bereits (Ziff. 154) brauchbar erwiesen hat. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich nur um eine geometrische Versinnbildlichung der Vektoren der Fläche handelt, nicht um eine Darstellung, die der Darstellung der Vektoren im Euklidischen Raum durch gerichtete Strecken oder Translationen gleichwertig wäre. Denn die Addition von Vektoren der Fläche läßt sich nicht durch die Zusammensetzung geodätischer Strecken darstellen, da diese Zusammensetzung nicht kommutativ ist.

233. Transformation der Vektoren einer Fläche. Um neue Grundvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_1$, $\bar{\mathfrak{e}}_2$ einzuführen, hat man ein neues System von Gaußschen Parameterkurven nötig, deren Richtungen im Punkt P die Richtungen der neuen Grundvektoren geben. Die alten Parameter $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ sind dann Funktionen der neuen Parameter $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$ und umgekehrt. Dann ist

$$\begin{aligned} du^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} d\bar{u}^1 + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} d\bar{u}^2; \qquad & d\bar{u}^1 &= \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} du^2; \\ du^2 &= \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} d\bar{u}^1 + \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} d\bar{u}^2; \qquad & d\bar{u}^2 &= \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} du^2. \end{aligned} \tag{4a}$$

Diese Gleichungen geben die Transformation der Maßzahlen du^1, du^2 bzw. $d\bar{u}^1$, $d\bar{u}^2$ des Vektors (3).

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1} &= \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}; \\ \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2} &= \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} + \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{aligned}$$

und die inversen Formeln. Da

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^1} = \mathfrak{e}_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u^2} = \mathfrak{e}_2, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^1} = \bar{\mathfrak{e}}_1, \quad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \bar{u}^2} = \bar{\mathfrak{e}}_2$$

die beiden Paare von Grundvektoren sind, gelten für deren Transformation die Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \frac{\partial \bar u^1}{\partial u^1}\bar{\mathfrak{e}}_1 + \frac{\partial \bar u^2}{\partial u^1}\bar{\mathfrak{e}}_2; & \bar{\mathfrak{e}}_1 &= \frac{\partial u^1}{\partial \bar u^1}\mathfrak{e}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial \bar u^1}\mathfrak{e}_2; \\ \mathfrak{e}_2 &= \frac{\partial \bar u^1}{\partial u^2}\bar{\mathfrak{e}}_1 + \frac{\partial \bar u^2}{\partial u^2}\bar{\mathfrak{e}}_2; & \bar{\mathfrak{e}}_2 &= \frac{\partial u^1}{\partial \bar u^2}\mathfrak{e}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial \bar u^2}\mathfrak{e}_2. \end{aligned} \tag{4b}$$

Die Transformationen (4a) und (4b) sind kontragredient; damit ist der Vektorcharakter des in der Fläche definierten Vektors

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_1 du^1 + \mathfrak{e}_2 du^2 = \bar{\mathfrak{e}}_1 d\bar u^1 + \bar{\mathfrak{e}}_2 d\bar u^2 \tag{5}$$

endgültig erkannt. J e d e G r ö ß e

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_1 v^1 + \mathfrak{e}_2 v^2$$

a u f d e r F l ä c h e, d e r e n M a ß z a h l e n v^1, v^2 sich wie du^1, du^2 t r a n s f o r m i e r e n, a l s o k o n t r a v a r i a n t s i n d, s o l l e i n V e k t o r d e r F l ä c h e h e i ß e n.

Die Parameter $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ selbst transformieren sich n i c h t wie ihre Differentiale, im allgemeinen überhaupt nicht linear; sie sind deshalb durch eingeklammerte obere Indizes bezeichnet.

234. Metrik einer Fläche. Das skalare Produkt zweier in einem Punkt P der Fläche definierter Vektoren ist durch die Zurückführung dieser Vektoren auf infinitesimale Vektoren des Raumes erklärt. So gibt insbesondere das skalare Produkt eines Vektors $d\mathfrak{s}$ mit sich selbst

$$d\mathfrak{s}\cdot d\mathfrak{s} = ds^2 \tag{6}$$

das Quadrat des L i n i e n e l e m e n t s der Fläche, während das skalare Produkt irgend zweier von P ausgehender infinitesimaler Vektoren $d\mathfrak{s}$ und $d'\mathfrak{s}$ der Fläche (die nicht etwa in die Richtung der Parameterkurven fallen sollen), zur Bestimmung ihres W i n k e l s ϑ dient:

$$d\mathfrak{s}\cdot d'\mathfrak{s} = ds\, d's \cos\vartheta. \tag{7}$$

Führt man für die skalaren Produkte der Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die früher gebrauchten Bezeichnungen ein (Ziff. 216):

$$\mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_1 = g_{11}; \quad \mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_2 = g_{12} = g_{21}; \quad \mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e}_2 = g_{22},$$

so erhält man für das Quadrat des Linienelements die m e t r i s c h e F u n d a m e n t a l f o r m

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2, \tag{8}$$

für das skalare Produkt zweier verschiedener Vektoren ihre P o l a r f o r m. Unter Verwendung der früher (Ziff. 48) verwendeten

Bezeichnungen E, F, G für die metrischen Fundamentalgrößen wird

$$ds^2 = E(du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G(du^2)^2. \qquad (8')$$

Man kann versuchen, das Quadrat des Linienelements (8′) wie ein Euklidisches Linienelement auf die Summe zweier Quadrate

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

zu bringen. In der Umgebung jedes Punktes P ist das ohne weiteres möglich. Hierzu hat man, anstelle der allgemeinen Parameterkurven $u^{(1)} = \text{const}$, $u^{(2)} = \text{const}$, zwei Systeme von Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ zu wählen, die in P aufeinander senkrecht stehen. Dann nimmt das Quadrat des Linienelements die Form

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

an. Setzt man hierin

$$dx = \sqrt{E}\, du, \quad dy = \sqrt{G}\, dv, \qquad (9)$$

so hat man die gewünschte Euklidische Form.

Die Metrik einer beliebigen Fläche ist also in der Umgebung eines jeden Punktes euklidisch, aber im allgemeinen nicht für die ganze Fläche. Denn da E und G Funktionen von u und v sind, sind dx und dy nicht die Differentiale zweier unabhängiger Veränderlicher x und y. Nur für besondere Flächen ist es möglich, die Parameter u und v als Funktionen von $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ so zu wählen, daß die Gleichungen (9) integrabel werden. Die Kriterien für die Möglichkeit einer solchen Wahl, also für die Existenz einer Euklidischen Metrik für die ganze Fläche, können an dieser Stelle noch nicht aufgestellt werden (Ziff. 265).

235. Mehrdimensionale Räume. Ein Wertepaar zweier unabhängiger Veränderlicher $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ definiert einen Punkt einer Fläche. Ein Punkt des gewöhnlichen (Euklidischen) Raumes ist durch ein Wertetripel dreier unabhängiger Veränderlicher (rechtwinklige oder allgemeine Koordinaten) bestimmt.

In Verallgemeinerung dieser Ausdrucksweise sagt man, daß ein Wertesystem von n unabhängigen Veränderlichen $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(n)}$ einen Punkt eines n-dimensionalen Raumes R_n bestimmt. $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \cdots u^{(n)}$ heißen die Koordinaten des Punktes.

Sind $P(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(n)})$ und $P'(u^{(1)} + du^1, u^{(2)} + du^2, \cdots u^{(n)} + du^n)$ zwei benachbarte Punkte im R_n, so sollen $du^1, du^2, \cdots du^n$ als Maßzahlen eines infinitesimalen, von P nach P' führenden Ortsvektors im R_n aufgefaßt werden. Für den infinitesimalen Orts-

vektor soll eine Bezeichnung eingeführt werden, die sich auf die gebrauchten Bezeichnungen reduziert, wenn der Raum R_n eine Fläche oder ein gewöhnlicher dreidimensionaler Raum wird.

Hierzu führt man für den Ortsvektor, der $d\mathfrak{s}$ genannt werden soll, eine extensive Größe

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_i du^i \tag{10}$$

ein. Die n Größen $\mathfrak{e}_i (i = 1, 2, \cdots n)$ werden als Grundvektoren im Punkt P von R_n bezeichnet, ihre Gesamtheit als die Basis, auf die der infinitesimale Ortsvektor $d\mathfrak{s}$ bezogen ist. Führt man an Stelle der Parameter $u^{(i)} (i = 1, 2, \cdots n)$ neue Parameter $\bar{u}^{(i)} (i = 1, 2, \cdots n)$ als Funktionen der $u^{(i)}$ ein, so muß gefordert werden, daß die Basis der $\mathfrak{e}_i$ derart durch eine neue Basis $\bar{\mathfrak{e}}_i$ ersetzt werden kann, daß der Ausdruck (10) invariant bleibt, daß also

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_i du^i = \sum \bar{\mathfrak{e}}_i d\bar{u}^i \tag{11}$$

ist.

Die Transformation der Differentiale der Parameter wird entsprechend (4a) durch

$$du^i = \sum_k \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} d\bar{u}^k; \quad d\bar{u}^i = \sum_k \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} du^k \tag{12a}$$

gegeben.

Für die Transformation der Basis erhält man, wenn man etwa (12a) in (11) einsetzt und nachher die Indizes i und k vertauscht

$$d\mathfrak{s} = \sum_i \mathfrak{e}_i du^i = \sum_{ik} \bar{\mathfrak{e}}_i \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} du^k = \sum_{ik} \bar{\mathfrak{e}}_k \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i} du^i;$$

also

$$\mathfrak{e}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i} \bar{\mathfrak{e}}_k; \quad \bar{\mathfrak{e}}_i = \sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \mathfrak{e}_k. \tag{12b}$$

Die Transformation der Grundvektoren (12b) ist kontragredient zur Transformation der Parameterdifferentiale (12a). Erstere sollen als kovariant, letztere als kontravariant bezeichnet werden.

Eine extensive Größe

$$\mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}_i v^i \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{13}$$

soll ein Vektor im R_n heißen, wenn das Größensystem der v^i kontravariant ist.

236. Metrik im R_n. Das skalare Produkt zweier Vektoren

$$\mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}_i v^i; \quad \mathfrak{w} = \sum_i \mathfrak{e}_i w^i$$

kann in folgender Weise eingeführt werden. Zunächst definiert

man die skalaren Produkte der Grundvektoren dadurch, daß man ihnen skalare Zahlwerte zuschreibt:

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_i = g_{ii}; \quad \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_k \cdot \mathfrak{e}_i = g_{ik} = g_{ki}; \tag{14}$$

dann fordert man allgemein die Gültigkeit des distributiven Gesetzes, indem man

$$\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} = \sum_i \mathfrak{e}_i v^i \cdot \sum_k \mathfrak{e}_k w^k = \sum_{ik} \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k v^i w^k \tag{15}$$

oder

$$\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} = \sum_{ik} g_{ik} v^i w^k$$

ansetzt. Für dieses Produkt gilt auch das kommutative Gesetz; es folgt aus der Gültigkeit des kommutativen Gesetzes für die skalaren Produkte der Grundvektoren (14).

Das skalare Produkt kann zur Einführung einer Metrik verwendet werden. Einem gerichteten Linienelement

$$d\mathfrak{s} = \sum_i \mathfrak{e}_i du^i$$

wird eine Länge (Betrag) ds zugeschrieben, die durch

$$ds^2 = d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s} = \sum_{ik} g_{ik} du^i du^k \tag{16}$$

definiert ist. Zwei Linienelemente $d_1\mathfrak{s}$ und $d_2\mathfrak{s}$ sollen einen Winkel ϑ bilden, der durch

$$d_1 s \, d_2 s \cos\vartheta = d_1\mathfrak{s} \cdot d_2\mathfrak{s} = \sum_{ik} g_{ik} d_1 u^i d_2 u^k \tag{17}$$

definiert ist.

Die quadratische Form (16) wird als metrische Fundamentalform bezeichnet, die bilineare Form (17) ist ihre Polarform; die Größen g_{ik} heißen die metrischen Fundamentalgrößen.

Die metrische Fundamentalform wird in der Regel[1]) als positiv definit[2]) vorausgesetzt, d. h. ds^2 als stets positiv. Dann ist jeden-

---

1) In der Relativitätstheorie nicht.

2) Die Kriterien dafür, daß eine quadratische Form positiv definit ist, sollen ohne Beweis angeführt werden. Wir betrachten die quadratische Form

$$f = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2 \cdots n)$$

und setzen voraus, daß sie sich nicht durch eine lineare Transformation auf eine Form von weniger als n Veränderlichen zurückführen läßt. Dann darf die Determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

falls

$$g_{ii}g_{kk} > g_{ik}^2$$

für alle Paare verschiedener Werte i, k. Dann ist aber auch

$$\Sigma g_{ik} d_1 u^i d_1 u^k \, \Sigma g_{ik} d_2 u^i d_2 u^k \geqq (\Sigma g_{ik} d_1 u^i d_2 u^k)^2$$

oder

$$|\cos\vartheta| \leqq 1,$$

der Winkel ϑ also stets reell. Das Gleichheitszeichen gilt nur für gleichgerichtete Linienelemente ($d_1 u^i$ proportional $d_2 u^i$).

Das Linienelementquadrat (16) kann in der Umgebung eines jeden Punktes auf die Form

$$ds^2 = \Sigma d x_i^2 \quad (i = 1. 2 \cdots n)$$

gebracht werden. Die dx_i sind aber, wie schon beim Beispiel der Fläche (Ziff. 234) bemerkt wurde, im allgemeinen nicht integrable Differentiale. Der Raum R_n besitzt also in einer infinitesimalen Umgebung eines jeden Punktes eine „Euklidische" Metrik, im allgemeinen aber nicht in einem endlichen Gebiet. Gilt die Euklidische Metrik in einem endlichen Gebiet, so heißt der Raum ein Euklidischer Raum, andernfalls wird er als Riemannscher Raum bezeichnet.

237. Reziproke Systeme. Neben der Basis $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ wird eine zweite, zu ihr reziproke Basis $\mathfrak{e}^i$ durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}^k &= 0 \quad \text{für } i \neq k \; (i, k = 1, 2 \cdots n) \\ \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}^i &= 1 \end{aligned} \tag{18}$$

definiert.

Die skalaren Produkte zweier Grundvektoren derselben Basis sollen wie früher bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k &= g_{ik} = g_{ki}, \\ \mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}^k &= g^{ik} = g^{ki}. \end{aligned} \tag{19}$$

---

nicht Null sein. Sodann bilden wir die Folge der Determinanten

$$D_1 = a_{11}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots \text{bis } D_n.$$

Wir setzen voraus, daß keine dieser Determinanten verschwindet; das läßt sich nötigenfalls durch eine Hilfstransformation erreichen.

Sind nun sämtliche Determinanten $D_1, D_2, D_3 \cdots D_n$ positiv, so ist die Form f positiv definit. Sie läßt sich durch eine lineare Transformation in die Gestalt

$$f = \frac{y_1^2}{D_1} + \frac{y_2^2}{D_1 D_2} + \frac{y_3^2}{D_2 D_3} + \cdots + \frac{y_n^2}{D_{n-1} D_n}$$

bringen, in der nur rein quadratische Glieder auftreten, und zwar mit positiven Koeffizienten.

Bezieht man einen Vektor $\mathfrak{v}$ auf die beiden Grundsysteme:

$$\mathfrak{v} = \sum v^i \mathfrak{e}_i,$$

bzw.

$$\mathfrak{v} = \sum v_i \mathfrak{e}^i, \tag{20}$$

so ergeben sich die Transformationsformeln der Maßzahlen durch skalare Multiplikation von (20) mit $\mathfrak{e}^k$ bzw. $\mathfrak{e}_k$:

$$v^k = \sum_i g^{ik} v_i$$

und

$$v_k = \sum_i g_{ik} v^i. \tag{21a}$$

Durch Einsetzen von (21a) in (20) erhält man die Formeln für die Transformation der Grundvektoren

$$\mathfrak{e}^k = \sum_i g^{ik} \mathfrak{e}_i$$

und

$$\mathfrak{e}_k = \sum_i g_{ik} \mathfrak{e}^i. \tag{21b}$$

Aus (21a) und (21b) folgt wie im gewöhnlichen dreidimensionalen Euklidischen Raum (Ziff. 215), daß die Grundvektoren zweier reziproker Systeme zueinander kontragredient sind und ebenso die Maßzahlen, während die Grundvektoren des einen Systems zu den Maßzahlen des andern kogredient sind.

Führt man einen infinitesimalen Vektor

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_i du^i$$

auf die kontravariante reziproke Basis über:

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}^i du_i,$$

so bestehen zwischen den Differentialen du^i und du_i die Beziehungen (21a). Dabei ist zu bemerken, daß die infinitesimalen kovarianten Maßzahlen du_i im allgemeinen keine integrablen Differentiale sind. Die Beschränkung auf integrable Differentiale du^i bei der ursprünglichen Basis wäre sachlich nicht notwendig gewesen; sie vereinfacht indessen manche Rechnungen. Die ursprüngliche Gestalt von $d\mathfrak{s}$ ist aus diesem Grunde für manche Zwecke vorzuziehen. —

Multipliziert man (21b) skalar mit $\mathfrak{e}_l$, bzw. $\mathfrak{e}^l$, so folgen die Beziehungen

$$\sum_i g^{ik} g_{il} = 0 \quad (k \neq l);$$

$$\sum_i g^{ik} g_{ik} = 1. \tag{22}$$

Die g^{ik} sind also die reduzierten Minoren der Determinante der g_{ik} und umgekehrt.

238. Invarianten im R_n. Wie im dreidimensionalen Euklidischen Raum ist auch im Riemannschen jeder Ausdruck von der Form $\Sigma\alpha^i\beta_i$ eine Invariante, wenn mit α^i ein kontravariantes, mit β_i ein kovariantes Größensystem bezeichnet wird. Der Beweis unterscheidet sich nicht von dem Ziff. 219 geführten.

Man erkennt nun sofort, daß das skalare Produkt zweier Vektoren eine Invariante ist. Bezieht man zwei Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ je auf die kovariante und kontravariante Basis

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_i v^i = \sum \mathfrak{e}^i v_i,$$
$$\mathfrak{w} = \sum \mathfrak{e}_i w^i = \sum \mathfrak{e}^i w_i,$$

so kann man für ihr skalares Produkt folgende 4 Gestalten erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} &= \sum g_{ik} v^i w^k \\ &= \sum v^i w_i = \sum v_i w^i \\ &= \sum g^{ik} v_i w_k. \end{aligned} \tag{23}$$

Davon haben die beiden mittleren die für Invarianten charakteristische Form, womit der Beweis erbracht ist; die erste und letzte gehen aus ihnen durch Heben, bzw. Senken je eines Index hervor.

Insbesondere kann die metrische Fundamentalform in folgenden Gestalten auftreten:

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathfrak{s}\cdot d\mathfrak{s} &= \sum g_{ik}\, du^i du^k \\ &= \sum du^i du_i \\ &= \sum g^{ik}\, du_i du_k. \end{aligned} \tag{24}$$

Als einfachste, nicht skalare invariante Größe kann jeder Vektor $\mathfrak{v}$ in folgende Gestalten gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} &= \sum \mathfrak{e}_i v^i \\ &= \sum \mathfrak{e}_i g^{ik} v_k \\ &= \sum \mathfrak{e}^i g_{ik} v^k \\ &= \sum \mathfrak{e}^i v_i. \end{aligned} \tag{25}$$

Ebenso läßt sich, wenn ein unbestimmtes (dyadisches) Produkt zweier Vektoren durch dieselben Forderungen wie im dreidimensionalen Euklidischen Raum definiert ist, eine extensive Invariante 2. Stufe in folgenden Gestalten ansetzen:

$$\begin{aligned} I &= \sum \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^i \\ &= \sum \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k g^{ik} \\ &= \sum \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k g_{ik} \\ &= \sum \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_i. \end{aligned} \tag{26}$$

Man bemerkt, daß die Dyade I im Riemannschen Raum dieselbe Eigenschaft besitzt wie die Dyade „Eins“ im Euklidischen

Raum: Jeder Vektor bleibt bei Multiplikation mit I ungeändert; nur seine Gestalt kann sich ändern. So ist z. B.:

$$I \cdot \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^i \cdot \sum \mathfrak{e}_k v^k = \sum \mathfrak{e}_i v^i = \mathfrak{v};$$

$$I \cdot \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^i \cdot \sum \mathfrak{e}^k v_k = \sum \mathfrak{e}_i g^{ik} v_k = \mathfrak{v}.$$

Der Übergang zu einer anderen Gestalt von $\mathfrak{v}$, der bisher durch Übergang zur reziproken Basis (für die Grundvektoren oder für die Maßzahlen) erreicht wurde, also das Heben oder Senken eines Index, läßt sich auch durch eine formale Multiplikation mit I erzielen.

Der Zusammenhang der metrischen Fundamentalform mit der Dyade I ist durch die Gleichung

$$ds^2 = d\mathfrak{s} \cdot I \cdot d\mathfrak{s}$$

gegeben; die Dyade I kann als (metrische) Fundamentaldyade bezeichnet werden.

239. Reziproke Systeme auf einer Fläche. Der einzige (nicht ausgeartete) Riemannsche Raum, der unserer Anschauung zugänglich ist, ist der zweidimensionale, die Fläche. Führt man auf einer Fläche in jedem Punkt neben der Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die reziproke nach (18) ein, so erhält man für das Linienelement die beiden Ausdrücke

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{e}_1 du^1 + \mathfrak{e}_2 du^2 = \mathfrak{e}^1 du_1 + \mathfrak{e}^2 du_2.$$

Die Grundvektoren stehen nach (18) paarweise aufeinander senkrecht ($\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}^2 = 0$; $\mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}^1 = 0$); die beiden Scharen von Parameterkurven, die zur kovarianten Basis gehören, bilden also mit je einer der beiden Scharen von Parameterkurven, die zur kontravarianten Basis gehören, ein Orthogonalsystem. Sind erstere durch die Gleichungen $u^{(1)} = \text{const}$, $u^{(2)} = \text{const}$ gegeben, so sind du^1 und du^2 integrable Differentiale; du_1 und du_2 aber, die hieraus nach (21a)

$$du_1 = g_{11} du^1 + g_{12} du^2; \quad du_2 = g_{21} du^1 + g_{22} du^2$$

zu berechnen sind, sind das im allgemeinen nicht. Man kann also nicht von Parameterkurven $u_{(1)} = \text{const}$, $u_{(2)} = \text{const}$ sprechen; sie sind vielmehr nur durch die Differentialgleichungen $du_1 = 0$, $du_2 = 0$ charakterisiert.

Für das Linienelement erhält man die drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 \\ &= du^1 du_1 + du^2 du_2 \qquad (27) \\ &= g^{11}(du_1)^2 + 2g^{12} du_1 du_2 + g^{22}(du_2)^2. \end{aligned}$$

Die Größen g^{ik} haben als reduzierte Minoren der Determinante der g_{ik} die Werte

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{11}\,g_{22} - (g_{12})^2}; \quad g^{12} = \frac{-g_{12}}{g_{11}\,g_{22} - (g_{12})^2}; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}\,g_{22} - (g_{12})^2}. \quad (28)$$

Bei Einführung der gebräuchlichen Bezeichnung E, F, G für die Fundamentalgrößen erhält man für das Linienelement die Ausdrücke:

$$ds^2 = E(du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G(du^2)^2$$
$$= \frac{G(du_1)^2 - 2F du_1 du_2 + E(du_2)^2}{EG - F^2}. \quad (29)$$

240. Tensoren. Ein Vektor war als in den Grundvektoren lineare Form definiert, die gegenüber einer linearen Transformation der Grundvektoren invariant ist:

$$\mathfrak{v} = \sum v^i \mathfrak{e}_i = \sum \bar{v}^i \bar{\mathfrak{e}}_i.$$

Die Transformation der Grundvektoren bestimmt die (kontragrediente) Transformation der Maßzahlen.

Als Tensor $n$ter Stufe wird eine in den Grundvektoren homogene Form $n$ten Grades definiert, die gegenüber einer linearen Transformation der Grundvektoren invariant ist. Der Tensor 2. Stufe

$$\Phi = \sum_{ik} a^{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k = \sum_{ik} \bar{a}^{ik} \bar{\mathfrak{e}}_i \bar{\mathfrak{e}}_k$$

heißt Dyade. Ein Tensor 3. Stufe hat die Gestalt

$$X = \sum_{ikl} a^{ikl} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l = \sum_{ikl} \bar{a}^{ikl} \bar{\mathfrak{e}}_i \bar{\mathfrak{e}}_k \bar{\mathfrak{e}}_l.$$

Die Maßzahlen eines Tensors $n$ter Stufe haben n Indizes und sind bezüglich eines jeden kontragredient zu den durch den gleichen Index gekennzeichneten Grundvektoren. Diese Eigenschaft der Maßzahlen ist notwendig und hinreichend für den Tensorcharakter einer Form.

241. Übergang von einer Basis zur reziproken. Die Darstellung eines jeden Tensors kann dadurch verändert werden, daß die verwendeten Grundvektoren ganz oder teilweise durch andere, z. B. die der reziproken Basis ersetzt werden. Jeder ganz oder teilweise auf die kovariante Basis bezogene Tensor ist eine Invariante von der Form $\sum_i a^i \mathfrak{e}_i$, wenn nur ein Index i herausgehoben wird. Dabei sind die a^i extensive Größen, von denen einzelne den Index i nicht enthaltende Faktoren rechts von $\mathfrak{e}_i$ stehen können. Diese

Invariante kann in die Form $\sum_i a_i e^i$ gebracht werden; dabei werden die e_i und die a^i durch folgende Formeln transformiert:

$$e_i = \sum_\varrho g_{i\varrho} e^\varrho; \quad e^i = \sum_\varrho g^{i\varrho} e_\varrho$$

und

$$a^i = \sum_\varrho g^{i\varrho} a_\varrho; \quad a_i = \sum_\varrho g_{i\varrho} a^\varrho. \tag{30}$$

Es ist nur darauf zu achten, daß die Reihenfolge der extensiven Faktoren von a^i beim Übergang zu a_i nicht geändert werden darf.

So kann der Tensor dritter Stufe:

$$X = \sum_{ikl} a^{ikl} e_i e_k e_l$$

in die Gestalt

$$X = \sum_{ikl} a^{ik}_{\cdot\cdot l} e_i e_k e^l$$

gesetzt werden. Dabei ist

$$a^{ik}_{\cdot\cdot l} = \sum_\varrho g_{\varrho l} a^{ik\varrho}.$$

242. Produktbildungen von Tensoren und Verjüngungen. 1. Die unbestimmte Multiplikation zweier Tensoren geht aus der unbestimmten Multiplikation der Vektoren durch Anwendung des assoziativen und distributiven Gesetzes hervor. Das unbestimmte Produkt zweier Tensoren $p$ter und $q$ter Stufe ist ein (spezieller) Tensor $(p+q)$ter Stufe.

Beispiel: Aus zwei Tensoren

$$\Phi = \sum a^i_k e_i e^k; \quad \Psi = \sum b^{l\,n}_{\,m} e_l e^m e_n$$

lassen sich zwei unbestimmte Produkte bilden:

$$\Phi\Psi = \sum a^i_k b^{l\,n}_{\,m} e_i e^k e_l e^m e_n;$$
$$\Psi\Phi = \sum a^i_k b^{l\,n}_{\,m} e_l e^m e_n e_i e^k.$$

2. Das skalare Produkt zweier Tensoren entsteht aus dem unbestimmten Produkt durch skalare Multiplikation der zusammentretenden Vektoren beider Faktoren. Das skalare Produkt zweier Tensoren $p$ter und $q$ter Stufe ist ein Tensor $(p+q-2)$ter Stufe.

Beispiel:

$$\Phi \cdot \Psi = \sum a^i_k b^{k\,n}_{\,m} e_i e^m e_n;$$
$$\Psi \cdot \Phi = \sum a^i_k b^{l\,n}_{\,m} g_{in} e_l e^m e^k.$$

3. Als Verjüngung eines Tensors $p$ter Stufe bezeichnet man die Bildung eines Tensors $(p-2)$ter Stufe durch skalare Multiplikation zweier in sämtlichen Komponenten des Tensors gleichstehender Reihen von vektoriellen Faktoren.

So lassen sich aus dem Tensor 3. Stufe Ψ durch Verjüngung 3 verschiedene Tensoren 1. Stufe (Vektoren) bilden, indem man

die ersten und zweiten, oder ersten und dritten, oder zweiten und dritten Faktoren skalar miteinander multipliziert:

$$\sum b_l^{ln} e_n; \quad \sum b_m^{ln} g_{ln} e^m; \quad \sum b_m^{lm} e_l.$$

Ein bereits bekannter Fall der Verjüngung ist die Bildung des ersten Skalars (Tensor nullter Stufe) einer Dyade: $\Phi_I = \sum a_k^k$.

4. Das skalare Produkt zweier Tensoren kann als Verjüngung eines unbestimmten Produkts derselben betrachtet werden. Diese Auffassung führt zur Bildung von skalaren Produkten zweier Tensoren durch skalare Multiplikation zweier beliebiger gleichstehender Reihen von vektoriellen Faktoren.

So kann man aus Φ und Ψ durch skalare Multiplikation der Vektoren mit den Indizes k und m den Tensor $\sum a_k^i b_m^{ln} g^{km} e_i e_l e_n$ bilden. Denselben Tensor erhält man, wenn man Φ mit einem aus Ψ durch eine Vertauschung zweier. Reihen von Vektoren entstehenden Tensor $\overline{\Psi} = \sum b_m^{ln} e^m e_l e_n$ in der ursprünglichen unter 2. definierten Weise skalar multipliziert:

$$\Phi \cdot \overline{\Psi} = \sum a_k^i b_m^{ln} g^{km} e_i e_l e_n.$$

Die zu einer Dyade konjugierte Dyade ist bereits früher in dieser Weise verwendet worden.

5. Durch *wiederholte*, $k$malige *Verjüngung* eines Tensors $p$ter Stufe entsteht ein Tensor $(p-2k)$ter Stufe. Damit ist auch die *wiederholt-skalare Multiplikation* zweier Tensoren definiert.

So ist

$$\Phi \cdot\cdot \Psi = \sum a_k^i b_i^{kn} e_n.$$

Sämtliche durch Multiplikation oder Verjüngung entstehende Formen sind *Invarianten*; skalare Invarianten (Tensoren nullter Stufe) können sich nur ergeben, wenn die Summe der Stufenzahlen ursprünglich gerade ist. Die skalaren Invarianten enthalten wie die extensiven jeden Index kovariant und kontravariant; dabei tritt aber nicht notwendig eine Reihe von Faktoren mit nur einem Index auf. Ein Beispiel für eine Invariante dieser Gestalt ist der unter 3. angegebene erste Skalar Φ_I einer Dyade Φ. Man kann den ersten Skalar übrigens auch nach 5. durch doppeltskalare Multiplikation von Φ mit der Dyade I erhalten:

$$\Phi \cdot\cdot I = \sum a_k^i e_i e^k \cdot\cdot \sum e_l e^l = \sum a_k^k = \Phi_I.$$

243. Drehung eines n-Beins. Unter einem n-*Bein* in einem Punkt eines R_n versteht man eine Basis $i_1, i_2, \cdots i_n$, die mit ihrer

reziproken zusammenfällt, die also durch die Bedingungen (18)

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}_\lambda \cdot \mathfrak{i}_\mu &= 0 \quad \text{für } \lambda \neq \mu, \\ \mathfrak{i}_\lambda \cdot \mathfrak{i}_\lambda &= 1 \end{aligned} \tag{31}$$

definiert ist. Geometrisch ist ein n-Bein also aufzufassen als eine Basis, die von n aufeinander senkrechten Einheitsvektoren gebildet ist.

In jedem Punkt P des R_n gibt es unendlich viele (nämlich $\infty^{\binom{n}{2}}$) n-Beine. Ein n-Bein kann durch folgende Konstruktion erhalten werden. Wählt man in P einen Einheitsvektor $\mathfrak{i}_1$ beliebig, so gibt es $(n-1)$ linear unabhängige Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_2$, die der Bedingung $\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_2 = 0$ genügen, also einen R_{n-1} bestimmen, der in P auf $\mathfrak{i}_1$ senkrecht steht. Greift man von den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_2$ einen beliebigen heraus, so gibt es $(n-2)$ Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_3$, die den Bedingungen $\mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_3 = 0$, $\mathfrak{i}_2 \cdot \mathfrak{i}_3 = 0$ genügen, also einen R_{n-2} bestimmen, der auf $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ senkrecht steht; usw. Der letzte Einheitsvektor $\mathfrak{i}_n$ ist bis auf den Richtungssinn eindeutig bestimmt.

Die Überführung eines n-Beins in ein anderes mit gleichem Scheitel wird durch eine Transformation bewirkt, bei der der Unterschied zwischen Kogredienz und Kontragredienz verschwindet; die Transformationsdeterminante ist orthogonal. Diese Überführung bezeichnet man als Drehung des n-Beins, die im Fall einer negativen Transformationsdeterminante mit einer Spiegelung verbunden ist. In einem mit dem n-Bein starr verbundenen Vektorbündel bleiben bei der Drehung alle Längen und Winkel erhalten.

Eine infinitesimale Drehung entsteht, wenn die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_\nu$ derartige Änderungen $d\mathfrak{i}_\nu$ erleiden, daß die Gleichungen (31) für die veränderten $\mathfrak{i}_\nu$ erhalten bleiben. Die Änderungen $d\mathfrak{i}_\nu$ werden also definiert durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}_\lambda \cdot d\mathfrak{i}_\mu + d\mathfrak{i}_\lambda \cdot \mathfrak{i}_\mu &= 0, \\ \mathfrak{i}_\lambda \cdot d\mathfrak{i}_\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Um die Änderungen $d\mathfrak{i}_\nu$ zu finden, denkt man sie sich in Komponenten in Richtung der $\mathfrak{i}_\nu$ zerlegt. Betrachtet man eine einparametrige Gruppe (Parameter t) von infinitesimalen Drehungen, so kann man auch die Differentialquotienten

$$\frac{d\mathfrak{i}_\nu}{dt} = \mathfrak{i}_\nu'$$

linear durch die $\mathfrak{i}_\nu$ ausdrücken:

$$\mathfrak{i}_\mu' = \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{i}_\lambda \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n). \tag{33}$$

Diese n Gleichungen lassen sich unter Verwendung einer Dyade

$$\tau = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \mathfrak{i}_\lambda \mathfrak{i}_\mu$$

zusammenfassen:

$$\mathfrak{i}'_\mu = \tau \cdot \mathfrak{i}_\mu . \tag{33'}$$

Die Dyade τ bestimmt auch die Änderung jedes mit dem n-Bein starr verbundenen Vektors $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v}' = \tau \cdot \mathfrak{v} .$$

Durch skalare Multiplikation von (33) mit $\mathfrak{i}_\lambda$ folgt

$$\mathfrak{i}'_\mu \cdot \mathfrak{i}_\lambda = a_{\lambda\mu} .$$

Damit geht (32) über in

$$a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda} = 0,$$
$$a_{\lambda\lambda} = 0 .$$

Die Dyade τ ist also antisymmetrisch.

Die Drehung des n-Beins wird nach (33) durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{i}'_1 &= \quad * \qquad a_{21}\mathfrak{i}_2 + a_{31}\mathfrak{i}_3 + \cdots + a_{n1}\mathfrak{i}_n ;\\
\mathfrak{i}'_2 &= -a_{21}\mathfrak{i}_1 \quad * \quad + a_{32}\mathfrak{i}_3 + \cdots + a_{n2}\mathfrak{i}_n ;\\
\mathfrak{i}'_3 &= -a_{31}\mathfrak{i}_1 - a_{32}\mathfrak{i}_2 \quad * \quad + \cdots + a_{n3}\mathfrak{i}_n ;\\
&\vdots\\
\mathfrak{i}'_n &= -a_{n1}\mathfrak{i}_1 - a_{n2}\mathfrak{i}_2 - a_{n3}\mathfrak{i}_3 - \cdots \qquad *
\end{aligned} \tag{33''}$$

§ 2. Absolutes Differential und lineare Übertragung.

244. Einführung des absoluten Differentials. Wenn in einem Riemannschen Raum R_n ein Vektorfeld gegeben werden soll, so muß zunächst in jedem (vgl. Ziff. 232) Punkt P eine Basis $\mathfrak{e}_k$ definiert sein. Dann hat der Feldvektor $\mathfrak{v}$ die Form

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_k v^k , \tag{34a}$$

wobei nicht nur die v^k, sondern auch die $\mathfrak{e}_k$ Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen sind.

Der infinitesimale Unterschied $d\mathfrak{v}$ des Feldvektors $\mathfrak{v}$ in zwei benachbarten Punkten wird sein absolutes Differential genannt:

$$d\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_k dv^k + \sum d\mathfrak{e}_k v^k . \tag{35a}$$

Es wird postuliert, daß das absolute Differential $d\mathfrak{v}$ eines Vektors selbst ein Vektor ist. Dann muß es möglich sein, $d\mathfrak{v}$ in Komponenten zu zerlegen unter Verwendung

der Basis $\mathfrak{e}_k$. Es muß also vor allem möglich sein, die absoluten Differentiale $d\mathfrak{e}_k$ der Grundvektoren durch die Grundvektoren selbst linear auszudrücken[1]):

$$d\mathfrak{e}_k = \sum_i db^i_k \mathfrak{e}_i. \tag{36a}$$

Die infinitesimalen Maßzahlen db^i_k sind im allgemeinen lineare Differentialformen, keine Differentiale.

Um über die Größen db^i_k etwas aussagen zu können, soll weiter festgesetzt werden, daß für das absolute Differentiieren einer Summe und eines Produkts dieselben Gesetze gelten wie für das gewöhnliche Differentiieren.

Multipliziert man (36a) skalar mit $\mathfrak{e}_l$, so folgt

$$\mathfrak{e}_l \cdot d\mathfrak{e}_k = \sum_i db^i_k g_{il}.$$

Hierzu addiert man die Gleichung, die durch Vertauschung der Indizes k und l entsteht; wegen

$$\mathfrak{e}_l \cdot d\mathfrak{e}_k + \mathfrak{e}_k \cdot d\mathfrak{e}_l = dg_{kl}$$

folgt:

$$dg_{kl} = \sum_i db^i_k g_{il} + \sum_i db^i_l g_{ik}. \tag{37a}$$

Diese Gleichung gilt für $k \neq l$ und für $k = l$. Sie wird als Lemma von Ricci bezeichnet.

Die n^2 Gleichungen des Lemmas von Ricci sind wegen der Symmetrie der Fundamentaldyade nicht sämtlich voneinander verschieden und genügen also nicht zur Bestimmung der n^2 Größen db^i_k. Sie sind nur notwendige Bedingungen, denen diese genügen müssen. —

Gibt man den Feldvektor bezogen auf die reziproke (kontravariante) Basis $\mathfrak{e}^k$

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}^k v_k, \tag{34b}$$

so ist sein absolutes Differential

$$d\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}^k dv_k + \sum d\mathfrak{e}^k v_k. \tag{35b}$$

Die absoluten Differentiale der Grundvektoren sollen mittels der Gleichungen

$$d\mathfrak{e}^k = \sum_i \overline{db}^k_i \mathfrak{e}^i$$

linear durch die Grundvektoren ausgedrückt werden.

[1]) Die Entwicklung der absoluten Differentialrechnung verdankt man G. Ricci und T. Levi-Civita. Die vektorielle Darstellung geht auf G. Hessenberg zurück: Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie; Math. Ann. **78**. S. 187 ff.

Die Größen $\overline{db}_i^k$ lassen sich auf die Größen db_i^k zurückführen. Hierzu differentiiert man die Gleichungen

$$\mathfrak{e}^k \cdot \mathfrak{e}_l = 0 \quad \text{für } k \neq l,$$
$$\mathfrak{e}^k \cdot \mathfrak{e}_k = 1$$

absolut:

$$d\mathfrak{e}^k \cdot \mathfrak{e}_l + \mathfrak{e}^k \cdot d\mathfrak{e}_l = 0$$

oder

$$\sum_i \overline{db}_i^k \mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}_l + \mathfrak{e}^k \cdot \sum_i db_l^i \mathfrak{e}_i = 0.$$

Durch Ausführung der skalaren Produkte erhält man

$$\overline{db}_l^k + db_l^k = 0.$$

Somit drücken sich die absoluten Differentiale $d\mathfrak{e}^k$ der Grundvektoren $\mathfrak{e}^k$ mittels der Gleichungen

$$d\mathfrak{e}^k = -\sum_i db_i^k \mathfrak{e}^i \tag{36b}$$

linear durch die Grundvektoren aus. Das Lemma von Ricci erhält dann die Form:

$$dg^{kl} = -\sum_i db_i^k g^{il} - \sum_i db_i^l g^{ik}. \tag{37b}$$

Das absolute Differential $d\mathfrak{v}$ des Feldvektors $\mathfrak{v}$ nimmt folgende beiden Gestalten an:

$$d\mathfrak{v} = \sum_i (dv^i + \sum_k db_k^i v^k)\mathfrak{e}_i; \tag{38a}$$

$$d\mathfrak{v} = \sum_i (dv_i - \sum_k db_i^k v_k)\mathfrak{e}^i. \tag{38b}$$

Da $d\mathfrak{v}$ eine geometrische Invariante ist, bilden die Maßzahlen von $\mathfrak{e}_i$ bzw. von $\mathfrak{e}^i$ in (38a) bzw. (38b) ein System von kontravarianten bzw. kovarianten Größen.

Es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, daß nicht das gleiche von den gewöhnlichen Differentialen dv^i bzw. dv_i gilt. Faßt man etwa die Gleichung (35a) ins Auge, so bemerkt man, daß $\sum \mathfrak{e}_k dv^k$ vom Standpunkt der Transformationstheorie kein Vektor ist. Denn da die v^k in (34a) kontragredient zu den $\mathfrak{e}_k$ sind, die Transformationskoeffizienten aber Funktionen des Ortes, gehen in die Transformationsformeln für dv^k außer den genannten Transformationskoeffizienten noch deren Differentiale ein. Geht man von den Maßzahlen v^k durch eine lineare Transformation

$$\bar{v}^i = \sum c_k^i v^k$$

zu den Maßzahlen $\bar{v}^i$ in bezug auf eine neue Basis $\bar{\mathfrak{e}}_i$ über, so gilt für die Transformation der gewöhnlichen Differentiale der Maßzahlen die Formel

$$d\bar{v}^i = \sum dc_k^i v^k + \sum c_k^i dv^k.$$

Die dv^k sind also nicht kontravariant und werden daher nicht ganz mit Recht durch obere Indizes bezeichnet. Das gleiche Bedenken gilt bezüglich der Bezeichnung der db_i^k, die, wie man jetzt leicht einsieht, nicht die gemischtvarianten Maßzahlen einer Dyade sind.

Die Gleichung (35a) läßt übrigens eine geometrische Deutung zu, wenn $\mathfrak{v}$ ein Feldvektor im gewöhnlichen Euklidischen Raum und die Basis $\mathfrak{e}_k$ ein seiner Stellung nach von Ort zu Ort veränderliches Dreibein ist.

Dann setzt sich die gesamte Änderung des Feldvektors $\mathfrak{v}$ beim Übergang von einem Aufpunkt P zu einem benachbarten Aufpunkt, sein absolutes Differential, aus zwei Teilen additiv zusammen: nämlich aus der relativen Änderung $\sum \mathfrak{e}_k dv^k$ in dem zu P gehörigen Koordinatensystem, dem relativen Differential, und aus einer von der Drehung des Koordinatensystems herrührenden Änderung $\sum d\mathfrak{e}_k v^k$, dem Führungsdifferential.

Diese Bezeichnungen sollen auch beibehalten werden, wenn in allgemeineren Fällen der unmittelbare geometrische Sinn verloren geht; vor allem also im Riemannschen Raum, aber auch im Euklidischen Raum, wenn die in einem Punkt der Umgebung von P definierte Basis der Basis in P nicht kongruent ist.

245. Absolutes Differential der Dyade I. Aus den Formeln (35 a, b) für das absolute Differential eines Vektors und aus den Festsetzungen für das absolute Differentiieren einer Summe und eines Produktes lassen sich die absoluten Differentiale von Tensoren ableiten.

Zunächst soll nur das absolute Differential dI der Dyade I berechnet werden. Aus

$$I = \sum \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}^k$$

folgt

$$\begin{aligned} dI &= \sum_k d\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}^k + \sum_k \mathfrak{e}_k d\mathfrak{e}^k \\ &= \sum_{ki} db_k^i \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^k - \sum_{ki} db_i^k \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}^i. \end{aligned}$$

Vertauscht man in der zweiten Summe die Indizes i und k, so erkennt man sofort, daß

$$dI = 0 \tag{39}$$

ist.

Nimmt man I in der Gestalt

$$I = \sum_{kl} g_{kl} \mathfrak{e}^k \mathfrak{e}^l$$

an, so ist

$$dI = \sum_{kl} dg_{kl} \mathfrak{e}^k \mathfrak{e}^l - \sum_{ikl} g_{kl} db_i^k \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l - \sum_{ikl} g_{kl} db_i^l \mathfrak{e}^k \mathfrak{e}^i.$$

Hieraus folgt durch eine geeignete Vertauschung der Indizes in der zweiten und dritten Summe

$$dI = \sum_{ikl} [dg_{kl} - db^i_k g_{il} - db^i_l g_{ik}] \mathfrak{e}^k \mathfrak{e}^l.$$

Diese Formel zeigt, daß das Verschwinden (39) des absoluten Differentials der Dyade I mit der Geltung des Lemmas von Ricci (37a, b) gleichwertig ist.

246. Lineare Übertragungen. Im gewöhnlichen Euklidischen Raum gelten Vektoren als gleich, wenn sie durch eine Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können. Im Riemannschen Raum R_n ist eine unbeschränkte Parallelverschiebung nicht möglich. Zwei Feldvektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in benachbarten Punkten P und P' sind als gleich zu betrachten, wenn ihr infinitesimaler Unterschied, ausgedrückt durch das absolute Differential $d\mathfrak{v}$, verschwindet. Man sagt dann, der Vektor $\mathfrak{v}$ kann nach dem benachbarten Aufpunkt P' linear übertragen werden.

Die Bedingung der linearen Übertragung ist damit

$$d\mathfrak{v} = 0. \tag{40}$$

Von Wichtigkeit ist folgender Satz:

Bei der linearen Übertragung bleibt die Länge eines Vektors und der Winkel zweier Vektoren erhalten.

Zum Beweise untersucht man die Änderung des skalaren Produkts zweier Vektoren bei einer linearen Übertragung:

$$d(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w}) = d\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{w}.$$

Da die absoluten Differentiale $d\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{w}$ verschwinden, ist die Änderung des skalaren Produktes Null. Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ denselben Vektor bedeuten, folgt der erste Teil des Satzes. Dann ergibt sich der zweite Teil sofort, wenn $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ verschiedene Vektoren sind. —

Die Änderung der Maßzahlen v^i bzw. v_i eines Vektors bei der linearen Übertragung ergibt sich nach (38a, b) durch folgende Formeln:

$$dv^i = -\sum_k db^i_k v^k, \tag{41a}$$

$$dv_i = \sum_k db^k_i v_k. \tag{41b}$$

Sie stehen im Zusammenhang mit den Grundformeln für das absolute Differentiieren eines Vektors (36a, b)

$$d\mathfrak{e}_i = \sum_k db_i^k \mathfrak{e}_k,$$

$$d\mathfrak{e}^i = -\sum_k db_k^i \mathfrak{e}^k.$$

und lassen sich mit ihrer Hilfe umformen. Aus der letzten Formel folgt

$$d\mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}_k = -db_k^i; \tag{42}$$

also ist

$$dv^i = \sum_k d\mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}_k v^k$$

oder

$$dv^i = d\mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{v}. \tag{43a}$$

Ähnlich

$$dv_i = d\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{v}. \tag{43b}$$

247. Lineare Übertragungen im Euklidischen Raum. Die im Euklidischen Raum getroffene Festsetzung, daß Vektoren, die durch eine Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können, als gleich gelten, verträgt sich mit den Festsetzungen, die allgemein für die Übertragung eines Vektors getroffen worden sind. Definiert man in jedem Punkt des Euklidischen Raumes eine Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ durch Parallelverschiebung einer im Anfangspunkt gegebenen Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, so sind an jeder Stelle nach (42) sämtliche $db_i^k = 0$. Da die Fundamentalgrößen g_{ik} sämtlich konstant sind, ist das Lemma von Ricci erfüllt. Die Maßzahlen eines Vektors bleiben bei der Parallelverschiebung ungeändert in Übereinstimmung mit den Gleichungen (41a), die sich in diesem Fall auf $dv^i = 0$ reduzieren.

Wird ein Bündel von Vektoren aus einem Punkt P in einen nicht notwendig benachbarten Punkt P' durch Parallelverschiebung übertragen, so bleibt es zu sich kongruent. Ein Vektor des Bündels wird dabei in einer Geraden verschoben, die dieselbe Richtung hat wie der Vektor. Die Geraden des Euklidischen Raumes sollen als Bahnkurven der Parallelverschiebung bezeichnet werden.

Die Parallelverschiebung ist indessen keineswegs die einzige im Euklidischen Raum mögliche lineare Übertragung, z. B. kann man in der Euklidischen Ebene eine lineare Übertragung dadurch festlegen, daß alle Feldvektoren vom gleichen Betrag, die mit den von einem festen Punkt O ausgehenden Radien gleiche Winkel bilden, als gleich betrachtet werden. Die Bahnkurven dieser linearen Übertragung sind die logarithmischen Spiralen mit dem Zentrum O, darunter speziell die von O ausgehenden Radien und die konzentrischen Kreise um O.

Die beiden betrachteten Übertragungen im Euklidischen Raum sind integrabel; d. h. sie sind nicht nur für infinitesimal benachbarte Punktepaare, sondern für beliebige Punktepaare definiert; und wenn man aus der kontinuierlichen Gruppe der infinitesimalen Operationen einer dieser linearen Übertragungen eine endliche Operation ableitet, so ist ihr Ergebnis vom Weg unabhängig. Indessen sind weder alle linearen Übertragungen im Euklidischen Raum integrabel, noch ist die Möglichkeit integrabler Übertragungen auf den Euklidischen Raum beschränkt.

248. Bahnkurven einer linearen Übertragung. Eine eindimensionale stetige Mannigfaltigkeit von Punkten im R_n, deren Koordinaten $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(n)}$ Funktionen eines Parameters t sind, wird als Kurve bezeichnet.

Der Vektor

$$d\mathfrak{s} = \Sigma \mathfrak{e}_i du^i = \sum \mathfrak{e}_i \frac{du^i}{dt} dt$$

heißt gerichtetes Linienelement der Kurve. Der Einheitsvektor

$$\frac{d\mathfrak{s}}{ds} = \sum \mathfrak{e}_i \frac{du^i}{ds}$$

soll Tangentialvektor der Kurve genannt werden.

Wenn der Tangentialvektor einer Kurve im Punkt P bei linearer Übertragung nach einem Nachbarpunkt P' der Kurve in den Tangentialvektor in P' übergeht, so heißt die Kurve eine Bahnkurve der linearen Übertragung im Riemannschen Raum. Die Bahnkurven einer linearen Übertragung sind also durch die Forderung definiert, daß das absolute Differential des Tangentialvektors längs einer Kurve verschwindet:

$$d\frac{d\mathfrak{s}}{ds} = d\sum \mathfrak{e}_i \frac{du^i}{ds} = 0$$

oder nach (38a):

$$\sum_i \mathfrak{e}_i \left[d\frac{du^i}{ds} + \sum_k d\,b_k^i \frac{du^k}{ds} \right] = 0. \tag{44}$$

Hieraus erhält man die Differentialgleichungen der Bahnkurven, wenn man die lineare Differentialform db_k^i ausführlich schreibt:

$$db_k^i = \sum_l \frac{\partial b_k^i}{\partial u^l} du^l,$$

wo die Koeffizienten $\frac{\partial b_k^i}{\partial u^l}$ der linearen Form nicht etwa Differentialquotienten sind. Man kann dann in (44) zu Differentialquotienten

nach ds übergehen und erhält die Differentialgleichungen der Bahnkurven in der Form

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{kl} \frac{\partial b^i_k}{\partial u^l} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{45}$$

Zu jeder Übertragung in einem Riemannschen Raum gehört ein besonderes durch die db^i_k bestimmtes System von Bahnkurven. Es soll nun versucht werden, aus allen möglichen Übertragungen eine ausgezeichnete derart herauszugreifen, daß sich beim Übergang zum Euklidischen Raum die Parallelverschiebung ergibt.

Im Euklidischen Raum sind die Bahnkurven der Parallelverschiebung die Geraden, d. h. die geodätischen Linien. Andrerseits haben die Differentialgleichungen der geodätischen Linien im Riemannschen Raum die Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven (45), wie sich im folgenden zeigen wird. Es liegt also nahe zu versuchen, eine Übertragung im R_n so zu definieren, daß die Bahnkurven die geodätischen Linien werden.

249. Geodätische Linien. Unter geodätischen Linien im R_n sollen diejenigen Kurven im R_n verstanden werden, deren Bogenlänge zwischen zwei festgewählten Punkten einen extremen Wert besitzt. Es muß also die Variation ihrer Bogenlänge zwischen zwei Punkten verschwinden, also:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} ds = 0$$

sein. Das Linienelement einer Kurve ist

$$ds = \sqrt{\sum g_{ik} du^i du^k} = \sqrt{\sum g_{ik} u'^i u'^k}\, dt,$$

wenn zur Abkürzung

$$u'^i = \frac{du^i}{dt} \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt ist. Setzt man weiter zur Abkürzung

$$L = \sqrt{\sum g_{ik} u'^i u'^k},$$

so sind die geodätischen Linien durch die Forderung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum g_{ik} u'^i u'^k}\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \tag{46}$$

bestimmt.

Mit den Methoden der Variationsrechnung wird diese Gleichung (46) durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen,

die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen, ersetzt. Ohne auf Begründungen und Einzelheiten einzugehen, soll wenigstens der Weg gezeigt werden, auf dem diese Differentialgleichungen abgeleitet werden.

L hängt von den Größen u^i und u'^i ab, die ihrerseits Funktionen des Parameters t sind; die in (46) vorgeschriebene Variation wird ausgeführt, indem man die Funktionen u^i und u'^i variiert:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\,\delta u^i + \frac{\partial L}{\partial u'^i}\,\delta u'^i\right)dt.$$

Durch Vertauschung von Differentiation und Variation

$$\delta u'^i = \delta\frac{d u^i}{dt} = \frac{d\,\delta u^i}{dt}$$

und nachfolgende Teilintegration erhält man

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\,\delta u^i + \frac{\partial L}{\partial u'^i}\frac{d}{dt}\,\delta u^i\right)dt$$

$$= \left[\sum\frac{\partial L}{\partial u'^i}\,\delta u^i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'^i}\right)\delta u^i\,dt.$$

Das von der Integration freie Glied der rechten Seite verschwindet, wenn an den Grenzen t_0 und t_1 die Variationen δu^i Null sind; das ist der Fall, wenn nur die Bogenlängen von Kurven zwischen zwei festen Punkten verglichen werden; soll also nach (46)

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

sein, so muß das Integral auf der rechten Seite verschwinden, und zwar für Variationen δu^i, die überall zwischen den Grenzpunkten beliebig sind. Es müssen also die unter dem Integral auftretenden Funktionen selbst verschwinden oder

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{47}$$

sein. Damit sind die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen, für unser Problem die Differentialgleichungen der geodätischen Linien, gefunden.

Führt man in (47) den Ausdruck für L ein, so erhält man nach einer Indexvertauschung

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma g_{ik} u'^i u'^k}} \sum_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\,u'^i u'^k - 2\frac{d}{dt}\frac{\sum_k g_{lk} u'^k}{\sqrt{\Sigma g_{ik} u'^i u'^k}} = 0. \tag{48}$$

Das Auftreten des Faktors 2 beim letzten Glied rührt von der Symmetrie von L hinsichtlich der Indizes i und k her.

Das Gleichungssystem (48) wird erheblich vereinfacht, wenn man den bisher beliebigen Parameter t durch die Bogenlänge s einer Integralkurve ersetzt. Dann ist

$$\sum g_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 1$$

an Stelle von $\Sigma g_{ik} u'^i u'^k$ zu setzen. Damit reduzieren sich die Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf:

$$\sum_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} - 2 \frac{d}{ds} \sum_k g_{lk} \frac{du^k}{ds} = 0.$$

Wenn man im zweiten Glied die Differentiation ausführt, folgt nach einer Indexvertauschung:

$$\sum_{ik} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} \right) \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} - 2 \sum_k g_{lk} \frac{d^2 u^k}{ds^2} = 0.$$

Zur Abkürzung führt man die Christoffelschen Symbole erster Art ein:

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right) \tag{49}$$

und erhält die Differentialgleichungen:

$$\sum_k g_{lk} \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots n).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 u^k}{ds^2}$ kann jetzt dadurch geleistet werden, daß man sie mit g^{lm} multipliziert und nach l summiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man die Christoffelschen Symbole zweiter Art

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ m \end{Bmatrix} = \sum_l g^{lm} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \tag{50a}$$

ein, aus denen sich wieder die erster Art

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ n \end{bmatrix} = \sum_m g_{mn} \begin{Bmatrix} i\,k \\ m \end{Bmatrix} \tag{50b}$$

ergeben. Damit erhält man die Differentialgleichungen der geodätischen Linien in der endgültigen Gestalt:

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} i\,k \\ m \end{Bmatrix} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots n). \tag{51}$$

250. Geodätische Übertragung. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien im R_n (51)

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{kl} \left\{ {kl \atop i} \right\} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

haben die Form der Differentialgleichungen der Bahnkurven einer linearen Übertragung (45):

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{kl} \frac{\partial b^i_k}{\partial u^l} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Es wird also eine lineare Übertragung existieren, deren Bahnkurven die geodätischen Linien sind, wenn die Größen $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ die Bedingungen erfüllen, an die die $\frac{\partial b^i_k}{\partial u^l}$ geknüpft sind. Diese Bedingungen folgen aus dem Lemma von Ricci (37a):

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m} = \sum_i \frac{\partial b^i_k}{\partial u^m} g_{il} + \sum_i \frac{\partial b^i_l}{\partial u^m} g_{ik}. \tag{52}$$

Es soll versuchsweise die rechte Seite der Gleichung berechnet werden, wenn an Stelle der $\frac{\partial b^i_k}{\partial u^m}$ und $\frac{\partial b^i_l}{\partial u^m}$ die entsprechenden Christoffelschen Symbole zweiter Art eingesetzt werden. Man erhält dafür nach (50b)

$$\sum_i \left\{ {km \atop i} \right\} g_{il} + \sum_i \left\{ {lm \atop i} \right\} g_{ik} = \left[{km \atop l} \right] + \left[{lm \atop k} \right].$$

Schreibt man diese Symbole ausführlich nach (49) auf, so erhält man

$$\left[{km \atop l} \right] + \left[{lm \atop k} \right] = \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m}. \tag{53}$$

Damit hat sich die linke Seite der Gleichungen (52) ergeben, und die Christoffelschen Symbole zweiter Art genügen also den Bedingungen des Lemmas von Ricci. Infolgedessen existiert im R_n eine lineare Übertragung, deren Bahnkurven die geodätischen Linien sind. Sie wird als geodätische Übertragung bezeichnet. Wegen der Analogie zur Parallelverschiebung im Euklidischen Raum wird sie auch Parallelverschiebung im Riemannschen Raum genannt.

251. Formeln für die geodätische Übertragung. Die Christoffelschen Symbole der ersten wie der zweiten Art ändern nach (49) und (50a) ihren Wert nicht bei Vertauschung der oberen Indizes:

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,i \\ l \end{bmatrix}; \qquad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\,i \\ l \end{Bmatrix}.$$

Da für die geodätische Übertragung

$$\frac{\partial b_k^i}{\partial u^l} = \begin{Bmatrix} k\,l \\ i \end{Bmatrix} \tag{54}$$

ist, folgt aus der Symmetrie der Christoffelschen Symbole:

$$\frac{\partial b_k^i}{\partial u^l} = \frac{\partial b_l^i}{\partial u^k}. \tag{55}$$

In Ziff. 244 wurde erkannt, daß die $d b_k^i$, die mit den Maßzahlen g_{ik} der Fundamentaldyade und ihren Differentialen durch das Lemma von Ricci zusammenhängen, nicht eindeutig durch diese bestimmt sind. Die Bestimmung wird eindeutig, wenn man die Forderung der Christoffelschen Symmetrie (55) hinzunimmt. Davon überzeugt man sich durch eine Abzählung:

Die Anzahl der Symbole $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ ist unter Voraussetzung der Christoffelschen Symmetrie gerade so groß wie die Anzahl der Differentialquotienten $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}$ mit Rücksicht auf die Symmetrie der metrischen Fundamentalgrößen g_{ik}, nämlich $\frac{n^2(n+1)}{2}$; mithin genügen die Gleichungen (52) gerade zur Bestimmung der Symbole. Die geodätische Übertragung ist also die einzige lineare Übertragung, für die die Christoffelsche Symmetrie gilt.

Da das Lemma von Ricci für die geodätische Übertragung erfüllt ist, haben die verschiedenen Gestalten, die das Lemma annehmen kann, nur den Wert von Identitäten.

Die beiden Formen (37a, b) des Lemmas

$$d g_{kl} - \sum_i d b_k^i g_{il} - \sum_i d b_l^i g_{ik} = 0,$$
$$d g^{kl} + \sum_i d b_i^k g^{il} + \sum_i d b_i^l g^{ik} = 0$$

führen auf die Identitäten

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^\varrho} - \sum_i \begin{Bmatrix} k\,\varrho \\ i \end{Bmatrix} g_{il} - \sum_i \begin{Bmatrix} l\,\varrho \\ i \end{Bmatrix} g_{ik} = 0 \tag{56}$$

oder nach (53)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^\varrho} - \begin{bmatrix} k\,\varrho \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l\,\varrho \\ k \end{bmatrix} = 0 \tag{56a}$$

und

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial u^\varrho} + \sum_i \left\{ {i\,\varrho \atop k} \right\} g^{il} + \sum \left\{ {i\,\varrho \atop l} \right\} g^{ik} = 0. \tag{56b}$$

In diesen Formeln sind die Maßzahlen du^ϱ des gerichteten Linienelements kontravariant angesetzt. Wählt man die kovariante Form du_ϱ, so werden die Identitäten weniger einfach. Denn die Christoffelschen Symbole sind für kontravariante Maßzahlen gebildet und für kovariante weniger brauchbar; vollständige Symmetrie lassen sie vermissen.

Die Grundformeln (36) und (41) für das absolute Differentiieren und die lineare Übertragung gehen für den Sonderfall der geodätischen Übertragung in folgende Formeln über:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u^l} &= \sum_k \left\{ {i\;l \atop k} \right\} \mathfrak{e}_k, & \frac{\partial v_i}{\partial u^l} &= \sum_k \left\{ {i\;l \atop k} \right\} v_k, \\ \frac{\partial \mathfrak{e}^i}{\partial u^l} &= -\sum_k \left\{ {k\;l \atop i} \right\} \mathfrak{e}^k, & \frac{\partial v^i}{\partial u^l} &= -\sum_k \left\{ {k\;l \atop i} \right\} v^k. \end{aligned} \tag{57}$$

Dabei sind die Maßzahlen du^l des gerichteten Linienelementes kontravariant vorausgesetzt.

252. Frenetsche Formeln im R_n. Als Anwendung der linearen Übertragung soll eine Erweiterung der Frenetschen Formeln für Kurven in Riemannschen Räumen durchgeführt werden. Einer Kurve im R_n läßt sich in jedem Punkt (und zwar in verschiedener Weise) ein n-Bein zuordnen. Um ein n-Bein, dessen Scheitel sich in einem Punkt P der Kurve befindet, in ein n-Bein in einem Nachbarpunkt P' der Kurve überzuführen, bedarf es einer linearen Übertragung und einer infinitesimalen Drehung. Bei der linearen Übertragung ist die absolute Änderung jedes Beines null. Es bleibt also nur übrig, die Art der Zuordnung eines n-Beins zu einem Kurvenpunkt festzusetzen und die Drehung zu bestimmen.

Als erstes Bein soll der Tangentenvektor $\mathfrak{t}_1$ in P gewählt werden. Durch die Drehung geht er in den Tangentenvektor $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ in P' über, wobei $d\mathfrak{t}_1$ ein absolutes Differential bedeutet. Wählt man als Parameter des Kurvenpunkts die von einem beliebigen Anfangspunkt aus gemessene Bogenlänge s, so kann

$$d\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1' ds$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{t}_1'$ den absoluten Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}$ bedeutet. $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_1'$ bestimmen ein Flächenelement E_2 (entsprechend der Schmiegungsebene im Euklidischen Raum). Als zweites Bein

soll ein Vektor $\mathfrak{t}_2$ gewählt werden, der in E_2 auf $\mathfrak{t}_1$ senkrecht steht (Hauptnormale). Bei der Drehung tritt $\mathfrak{t}_2$ aus E_2 heraus und geht in einen Vektor $\mathfrak{t}_2 + d\mathfrak{t}_2$ über, der zusammen mit $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ ein Raumelement E_3 definiert. Dabei ist

$$d\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2' ds.$$

Als drittes Bein soll ein Vektor $\mathfrak{t}_3$ gewählt werden, der in E_3 auf E_2 senkrecht steht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird jedem Punkt der Kurve ein bis auf den Richtungssinn der Einheitsvektoren eindeutig bestimmtes n-Bein, das begleitende n-Bein, zugeordnet.

Nach Bestimmung des $n$ten Beins bricht das Konstruktionsverfahren ab, da die Richtungsänderung des $n$ten Beins dem durch das n-Bein bestimmten Raumelement E_n angehört. (Wenn die Kurve im Sinn der linearen Übertragung im ganzen oder in der Umgebung eines singulären Punktes einem Raum von weniger als n Dimensionen angehört, bricht das Verfahren vorzeitig ab; das begleitende n-Bein ist dann im allgemeinen nicht eindeutig festzulegen. Insbesondere wird für die Bahnkurven der Übertragung selbst die Konstruktion des begleitenden n-Beins schon nach dem Tangentenvektor unmöglich, bzw. unbestimmt.)

Die Konstruktion des n-Beins läßt erkennen, daß jeder Differentialquotient $\mathfrak{t}_\nu'$ durch höchstens die ersten $\nu + 1$ Einheitsvektoren linear ausdrückbar ist. Die Formeln (33″) für die Drehung eines n-Beins brechen also spätestens mit dem rechts der Hauptdiagonalen stehenden Element ab. Aus der Antisymmetrie der Determinante dieses Gleichungssystems folgt dann, daß auch links der Hauptdiagonale nur je höchstens ein Element auftreten kann.

Damit werden die Gleichungen für die Drehung des begleitenden n-Beins:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{t}_1' = & * & k_1\mathfrak{t}_2 & & & \\
\mathfrak{t}_2' = & -k_1\mathfrak{t}_1 & * & +k_2\mathfrak{t}_3 & & \\
\mathfrak{t}_3' = & & -k_2\mathfrak{t}_2 & * & +k_3\mathfrak{t}_4 & \\
\vdots & & & & & \\
\mathfrak{t}_n' = & & & & -k_{n-1}\mathfrak{t}_{n-1} & *.
\end{array} \tag{58}$$

Sie sind die für eine Kurve im Riemannschen Raum geltende Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln. Die Koeffizienten k_λ der Transformation sind für die Kurve charakteristische geometrische Größen und werden wie im dreidimensionalen Euklidischen Raum als die Krümmungen der Kurve bezeichnet.

Aus (58) folgt

$$k_\lambda = \frac{d\mathfrak{t}_\lambda}{ds} \cdot \mathfrak{t}_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1). \tag{58'}$$

Diese Darstellbarkeit der Krümmungen k_λ als skalare Produkte läßt ihren Invariantencharakter erkennen.

Geht man zu Koordinaten über, so sind die absoluten Differentiale $d\mathfrak{t}_\lambda$ nach (38) unter Einführung einer von Ort zu Ort veränderlichen Basis zu berechnen. Die Einfachheit und Klarheit der Formeln (58) und (58') geht dabei verloren[1]).

§ 3. Differentialinvarianten.

253. Bildung von Differentialinvarianten. Der symbolische Vektor

$$\nabla = \sum e^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{59}$$

besitzt im Riemannschen Raum ebenso invarianten Charakter wie im Euklidischen. Bei seiner Anwendung auf eine extensive Größe, die auf eine von Ort zu Ort veränderliche Basis bezogen ist, hat sich die in ∇ vorgeschriebene Differentiation auch auf die Grundvektoren der Basis zu erstrecken.

Unter Berücksichtigung dieser Vorschrift können durch Anwendung von ∇ auf skalare oder extensive Feldfunktionen neue Feldfunktionen mit invariantem Charakter gewonnen werden. Sie sollen, gleichgültig ob sie skalar oder extensiv sind, als Differentialinvarianten bezeichnet werden.

Aus einer skalaren Feldfunktion $U(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(n)})$ läßt sich als einfachste Differentialinvariante ihr Gradient

$$\nabla U = \sum e^i \frac{\partial U}{\partial u^i} \tag{60}$$

ableiten. Das skalare Produkt eines Gradienten mit sich selbst oder einem anderen Gradienten gibt eine skalare Differentialinvariante (erster und gemischter Beltramischer Differentialparameter):

$$\begin{aligned} \nabla U \cdot \nabla U &= \sum g^{ik} \frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial U}{\partial u^k}, \\ \nabla U \cdot \nabla V &= \sum g^{ik} \frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial V}{\partial u^k}. \end{aligned} \tag{61}$$

---

1) Vgl. M. Lagally, Die Frenetschen Formeln im Riemannschen Raum. Leipziger Berichte **77** (1925).

Durch Anwendung von ∇ auf einen Feldvektor $\mathfrak{v}$ erhält man eine Dyade, die lokale Dyade:

$$\nabla \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Sigma \mathfrak{e}_k v^k.$$

Bei Beschränkung auf geodätische Übertragungen wird nach (57)

$$\nabla \mathfrak{v} = \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_l \left[\frac{\partial v^l}{\partial u^i} + \sum_k \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} v^k\right]. \tag{62a}$$

Bezieht man $\mathfrak{v}$ auf die kontravariante Basis, so wird

$$\nabla \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Sigma \mathfrak{e}^k v_k;$$

$$\nabla \mathfrak{v} = \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l \left[\frac{\partial v_l}{\partial u^i} - \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} v_k\right]. \tag{62b}$$

Durch Verjüngung kann man eine skalare Differentialinvariante, die Divergenz von $\mathfrak{v}$, gewinnen:

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \sum_i \left[\frac{\partial v^i}{\partial u^i} + \sum_k \begin{Bmatrix} i\,k \\ i \end{Bmatrix} v^k\right] \tag{63a}$$

oder

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \sum_{il} g^{il} \left[\frac{\partial v_l}{\partial u^i} - \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} v_k\right]. \tag{63b}$$

Ist speziell $\mathfrak{v}$ ein Gradient:

$$\mathfrak{v} = \nabla U, \quad \text{also} \quad v^l = \frac{\partial U}{\partial u_l}, \qquad v_l = \frac{\partial U}{\partial u^l},$$

so nimmt seine lokale Dyade die beiden Gestalten an:

$$\nabla^2 U = \nabla \nabla U = \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}_l \left[\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial U}{\partial u_l}\right) + \sum_k \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_k}\right] \tag{64a}$$

oder

$$\nabla^2 U = \nabla \nabla U = \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^i \partial u^l} - \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u^k}\right]. \tag{64b}$$

Die durch Verjüngung entstehende skalare Differentialinvariante ist als Laméscher oder zweiter Beltramischer Differentialparameter bekannt:

$$\triangle U = \nabla \cdot \nabla U = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial U}{\partial u_i}\right) + \sum_k \begin{Bmatrix} i\,k \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_k}\right] \tag{65a}$$

oder

$$\triangle U = \nabla \cdot \nabla U = \sum_{il} g^{il} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^i \partial u^l} - \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u^k}\right]. \tag{65b}$$

In dreidimensionalen Räumen läßt sich aus (62b) auch ein Ausdruck für die Rotation von $\mathfrak{v}$ bilden, der wegen der Symmetrie der Christoffelschen Symbole besonders einfach wird [vgl. Ziff. 226 (45)]: (66)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}^i \times \mathfrak{e}^l \left(\frac{\partial v_l}{\partial u^i} - \frac{\partial v_i}{\partial u^l}\right) = \frac{1}{[\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,\mathfrak{e}_3]} \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Aus den Ausdrücken (63a) und (65a) für $\nabla \cdot \mathfrak{v}$ und $\triangle U$ lassen sich durch eine Umformung die Christoffelschen Symbole entfernen. Diese Umformung stützt sich auf die Identität

$$\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial u^i} = \sum_k \begin{Bmatrix} i\,k \\ k \end{Bmatrix}, \tag{67}$$

in der g die Determinante der Maßzahlen g_{ik} der metrischen Fundamentaldyade bedeutet. (Gramsche Determinante.)

Um diese Identität zu beweisen, setzt man g in die Form

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & & g_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_1 & \cdots & \mathfrak{e}_n \cdot \mathfrak{e}_1 \\ \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 & & \mathfrak{e}_n \cdot \mathfrak{e}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_n & \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_n & & \mathfrak{e}_n \cdot \mathfrak{e}_n \end{vmatrix}.$$

Die Differentiation von g wird in der Weise ausgeführt, daß die zweite Determinante nach Spalten bezüglich des ersten Faktors eines jeden Elements und nach Zeilen bezüglich des zweiten Faktors differentiiert wird; verwendet man hierzu die Formel (57):

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial u^i} = \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \mathfrak{e}_k,$$

so tritt bei der Differentiation des Faktors $\mathfrak{e}_l$ ein Summe von Determinanten auf, die sämtlich bis auf eine verschwinden, welche sich von der ursprünglichen Determinante nur um den Faktor $\begin{Bmatrix} i\,l \\ l \end{Bmatrix}$ unterscheidet. Mithin wird

$$\frac{\partial g}{\partial u^i} = 2g\left[\begin{Bmatrix} i\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \cdots \begin{Bmatrix} i\,n \\ n \end{Bmatrix}\right],$$

woraus sofort die Identität (67) folgt.

Dann wird (63a), wenn man noch in $\frac{\partial v^i}{\partial u^i}$ den Index i durch k ersetzt,

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \sum_k \left[\frac{\partial v^k}{\partial u^k} + \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial u^k} v^k\right]$$

oder

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial u^k} (\sqrt{g} v^k). \tag{68}$$

Für $\mathfrak{v} = \nabla U$, also $v^k = \frac{\partial U}{\partial u_k}$, folgt:

$$\triangle U = \nabla \cdot \nabla U = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial u_k} \right).$$

Führt man die kovarianten Maßzahlen des Gradienten ∇U ein, so wird

$$\triangle U = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial u^k} \sum_i \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial U}{\partial u^i}. \tag{68'}$$

254. Differentialinvarianten im dreidimensionalen Raum. Die für ∇U und $\triangle U$ erhaltenen Ausdrücke lassen eine bemerkenswerte Umformung zu, die zwar für beliebige Räume von n Dimensionen ausführbar ist, aber für den dreidimensionalen Euklidischen Raum bei Einführung allgemeiner Koordinaten besonders wichtig ist.

Der Gradient (60)

$$\nabla U = \sum \mathfrak{e}^i \frac{\partial U}{\partial u^i}$$

läßt sich bei Einführung der kovarianten Basis in die Gestalt

$$\nabla U = \sum_{ik} \mathfrak{e}_k g^{ik} \frac{\partial U}{\partial u^i} \tag{69}$$

setzen. Da die g^{ik} die reduzierten Minoren der Determinante g der g_{ik} sind, kann der für ∇U erhaltene Ausdruck als geränderte Determinante geschrieben werden, die unter Beschränkung auf drei Dimensionen angegeben werden soll:

$$\nabla U = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{\partial U}{\partial u^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{\partial U}{\partial u^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{\partial U}{\partial u^3} \end{vmatrix}. \tag{70}$$

Durch Multiplikation von (70) mit der ursprünglichen Definitionsgleichung des Gradienten (60) erhält man für den ersten Beltramischen Differentialparameter den Ausdruck:

$$\nabla U \cdot \nabla U = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u^1} & \frac{\partial U}{\partial u^2} & \frac{\partial U}{\partial u^3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{\partial U}{\partial u^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{\partial U}{\partial u^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{\partial U}{\partial u^3} \end{vmatrix} . \tag{70'}$$

Dieser Ausdruck ist für das praktische Rechnen bequemer als der ursprüngliche (61).

Für orthogonale Koordinaten erhält man erheblich vereinfachte Ausdrücke, wenn man die Determinanten (70) und (70a) entwickelt:

$$\begin{aligned} \nabla U &= \frac{\mathfrak{e}_1}{g_{11}} \frac{\partial U}{\partial u^1} + \frac{\mathfrak{e}_2}{g_{22}} \frac{\partial U}{\partial u^2} + \frac{\mathfrak{e}_3}{g_{33}} \frac{\partial U}{\partial u^3}; \\ \nabla U \cdot \nabla U &= \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\partial U}{\partial u^1}\right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \left(\frac{\partial U}{\partial u^2}\right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \left(\frac{\partial U}{\partial u^3}\right)^2 . \end{aligned} \tag{70''}$$

Der Laméschche Differentialparameter (68)

$$\triangle U = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial u^k} g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial u^i}$$

ist formal geradeso gebaut wie der Ausdruck (69). An Stelle der Grundvektoren $\mathfrak{e}_k$ treten die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial u^k}$, deren Einfluß sich auf die nachfolgenden Faktoren erstreckt. Setzt man also wie oben $\triangle U$ in die Form einer geänderten Determinante

$$\triangle U = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial u^1} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial u^2} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial u^3} \end{vmatrix} , \tag{71}$$

so ist zu berücksichtigen, daß die in der ersten Zeile vorgeschriebenen Differentiationen $\frac{\partial}{\partial u^k}$ an den Minoren auszuführen sind, die bei der Entwicklung der Determinante als formale Faktoren der $\frac{\partial}{\partial u^k}$ auftreten.

Für orthogonale Koordinaten ergibt die Entwicklung der Determinante den Ausdruck:

$$\triangle U = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22} g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sqrt{\frac{g_{11} g_{33}}{g_{22}}} \frac{\partial U}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\sqrt{\frac{g_{11} g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U}{\partial u^3}\right)\right],$$

der von Jacobi bei der Transformation des im Euklidischen Raum mit dem Laméschen Differentialparameter identischen Laplaceschen Ausdrucks

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

gefunden wurde.

255. Differentialinvarianten einer Fläche. Ist $U(u^{(1)}, u^{(2)})$ eine skalare Feldfunktion auf einer Fläche, so nimmt der erste Beltramische Differentialparameter

$$\nabla U \cdot \nabla U = \sum_{ik} g^{ik} \frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial U}{\partial u^k} \quad (i, k = 1, 2)$$

die folgende Gestalt an:

$$\nabla U \cdot \nabla U = \frac{E\left(\frac{\partial U}{\partial u^2}\right)^2 - 2F \frac{\partial U}{\partial u^1} \frac{\partial U}{\partial u^2} + G\left(\frac{\partial U}{\partial u^1}\right)^2}{EG - F^2}. \qquad (72\text{a})$$

Der gemischte Differentialparameter wird

$$\nabla U \cdot \nabla V = \frac{E \frac{\partial U}{\partial u^2} \frac{\partial V}{\partial u^2} - F\left(\frac{\partial U}{\partial u^1} \frac{\partial V}{\partial u^2} + \frac{\partial U}{\partial u^2} \frac{\partial V}{\partial u^1}\right) + G \frac{\partial U}{\partial u^1} \frac{\partial V}{\partial u^1}}{EG - F^2}.$$

Für den Laméschen Differentialparameter erhält man mittels derselben Formeln:

$$\triangle U = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \frac{G \frac{\partial U}{\partial u^1} - F \frac{\partial U}{\partial u^2}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{-F \frac{\partial U}{\partial u^1} + E \frac{\partial U}{\partial u^2}}{\sqrt{EG - F_2}}\right]. \qquad (72\text{b})$$

256. Krümmungstensor als Differentialinvariante. Die bereits aufgestellte lokale Dyade $\nabla \mathfrak{v}$ eines Vektors $\mathfrak{v}$ (62b)

$$\nabla \mathfrak{v} = \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l \left[\frac{\partial v_l}{\partial u^i} - \sum_k \left\{ {il \atop k} \right\} v_k\right]$$

ist nicht symmetrisch. Ihr antisymmetrischer Teil ist

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{v} - \overset{\downarrow}{\mathfrak{v}} \nabla) = \frac{1}{2} \sum_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l \left(\frac{\partial v_l}{\partial u^i} - \frac{\partial v_i}{\partial u^l}\right).$$

Nur wenn $\mathfrak{v}$ ein Gradient ist

$$\mathfrak{v} = \nabla U$$

oder

$$\mathfrak{v} = \overset{\downarrow}{U} \nabla,$$

Die Fläche des sphärischen Dreiecks ist

$$F = R^2 \varepsilon,$$

wenn R der Radius der Kugel, ε der im Bogen gemessene sphärische Exzeß ist. Hieraus folgt, wenn $\boldsymbol{K} = \frac{1}{R^2}$ das Gaußsche Krümmungsmaß der Kugel bedeutet,

$$\boldsymbol{K} = \frac{\varepsilon}{F}. \tag{75}$$

Das Krümmungsmaß der Kugel kann also durch den Winkel gemessen werden, um den ein Vektorbüschel bei geodätischer Übertragung um ein sphärisches Dreieck vom Flächeninhalt Eins gedreht wird.

Dieser Satz läßt eine Verallgemeinerung für beliebige Flächen zu, für deren Ableitung allerdings die Kenntnis des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes vorausgesetzt werden muß[1]):

$$\int \boldsymbol{K} do + \oint \frac{ds}{\varrho_g} = 2\pi.$$

Dabei bedeutet $\int \boldsymbol{K} do$ das Oberflächenintegral des Krümmungsmaßes über ein beliebig begrenztes Flächenstück, $\oint \frac{ds}{\varrho_g}$ das Linienintegral der geodätischen Krümmung längs der Begrenzung des Flächenstücks. Ist das Flächenstück ein von geodätischen Linien begrenztes n-Eck, so verschwindet die geodätische Krümmung längs der Seiten des n-Ecks; nur die Ecken des n-Ecks liefern Beiträge von der Größe der Außenwinkel α_i' zu dem Linienintegral. Also:

$$\int \boldsymbol{K} do + \sum \alpha_i' = 2\pi \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Ersetzt man die Außenwinkel α_i' durch die Innenwinkel

$$\alpha_i = \pi - \alpha_i',$$

so wird

$$\int \boldsymbol{K} do = \sum \alpha_i - (n-2)\pi.$$

Auf der rechten Seite steht der Überschuß ε der Winkelsumme des geodätischen n-Ecks über die Winkelsumme eines geradlinigen, ebenen n-Ecks. Dieser Überschuß gibt aber gerade den Winkel, um den ein Vektorbüschel bei linearer Übertragung um das geodätische n-Eck gedreht wird.

1) Vgl. etwa W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, § 63.

Die Gleichung

$$\int \boldsymbol{K}\, d o = \varepsilon$$

ist also die Verallgemeinerung der für die Kugel unmittelbar abgeleiteten Gleichung (75). Läßt man die Seiten des n-Ecks klein werden und geht zur Grenze über, so erhält man

$$\boldsymbol{K} = \lim \frac{\varepsilon}{\int d o} \,. \tag{76}$$

Die geodätische Übertragung in einer Fläche ist jedenfalls vom Weg nur dann unabhängig, wenn ihr Krümmungsmaß in allen Punkten verschwindet, also die Fläche eine (Euklidische) Ebene oder auf eine solche abwickelbar ist.

258. Lineare Übertragung um ein infinitesimales Viereck. An dem Beispiel der geodätischen Übertragung eines Vektorbüschels um ein sphärisches Dreieck (auf der Kugel) oder um ein geodätisches n-Eck auf einer beliebigen Fläche wurde erkannt, daß ein Vektorbüschel bei dieser Übertragung eine Drehung erfahren hat, wenn sein Scheitel in die Ausgangslage zurückkommt. Auf die ursprüngliche Basis bezogen haben sich also die Maßzahlen eines jeden Vektors verändert.

Es soll nun allgemein im Riemannschen Raum ein Vektorbündel um ein infinitesimales Parallelogramm herum linear übertragen und die Änderung bestimmt werden, die jeder Vektor dabei erleidet. Diese Änderung besteht in einer Änderung der Maßzahlen, wenn der Vektor wieder auf die alte Basis bezogen wird.

Statt den Scheitel des Vektorbündels um das Parallelogramm zu führen, ist es zweckmäßig, ihn auf zwei verschiedenen Wegen vom Ausgangspunkt P in die gegenüberliegende Ecke P^* des Parallelogramms zu führen (Fig. 73). Dann hat man die Differenz der relativen Änderungen eines Vektors bei linearer Übertragung längs dieser beiden Wege zu untersuchen.

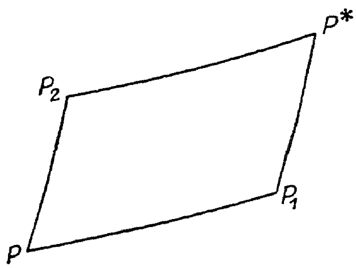


Fig. 73.

Das ist folgendermaßen einzusehen. Der infinitesimale Unterschied eines Vektors $\mathfrak{v}$ in zwei benachbarten Punkten P und P_1, sein absolutes Differential $d\mathfrak{v}$, setzt sich additiv aus seinem relativen und seinem Führungsdifferential zusammen. Bei linearer Übertragung ist das absolute Differential

$$d\mathfrak{v} = \sum_i \left(d v^i + \sum_k d b^i_k v^k\right) \mathfrak{e}_i = 0 \,.$$

also das relative Differential durch das Führungsdifferential bestimmt und ihm entgegengesetzt gleich. Das relative Differential ist dann

$$\delta \mathfrak{v} = \sum_i d v^i \mathfrak{e}_i = -\sum_{ik} d b_k^i v^k \mathfrak{e}_i. \tag{77}$$

Das relative Differential gibt den Unterschied der Maßzahlen zweier Vektoren in P und P_1, die durch lineare Übertragung ineinander übergehen, bezogen auf die Basis in P. —

Nun sollen alle Änderungen, die bei linearer Übertragung längs der Seite PP_1 des Parallelogramms $PP_1P^*P_2P$ und längs der gegenüberliegenden Seite P_2P^* eintreten, mit d_1 bzw. δ_1 bezeichnet werden; alle Änderungen bei linearer Übertragung längs der Seiten PP_2 und P_1P^* mit d_2 bzw. δ_2.

Bei linearer Übertragung von P nach P_1 ist die relative Änderung von $\mathfrak{v}$

$$\delta_1 \mathfrak{v} = \sum_i \mathfrak{e}_i d_1 v^i;$$

hierzu kommt bei Übertragung von P_1 nach P^*

$$\delta_2(\mathfrak{v} + \delta_1 \mathfrak{v}) = \delta_2 \mathfrak{v} + \delta_2 \delta_1 \mathfrak{v}.$$

Die relative Änderung von $\mathfrak{v}$ auf dem Weg von P über P_1 nach P^* ist also

$$\delta_1 \mathfrak{v} + \delta_2 \mathfrak{v} + \delta_2 \delta_1 \mathfrak{v}.$$

Nimmt man den Weg von P über P_2 nach P^*, so vertauschen sich die Indizes 1 und 2.

Der Unterschied der relativen Änderungen auf beiden Wegen ist also

$$\delta_2 \delta_1 \mathfrak{v} - \delta_1 \delta_2 \mathfrak{v};$$

ebenso groß ist die relative Änderung des Vektors $\mathfrak{v}$ bei linearer Übertragung um das Parallelogramm herum auf dem Weg $PP_1P^*P_2P$. Diese ist, da der übertragene Vektor dann wieder auf dieselbe Basis bezogen ist wie im Ausgangspunkt, die gesamte Änderung, die der Vektor $\mathfrak{v}$ bei linearer Übertragung um das Viereck herum erleidet, und somit jedenfalls ein Vektor.

Abkürzend soll

$$\delta_2 \delta_1 \mathfrak{v} - \delta_1 \delta_2 \mathfrak{v} = D \mathfrak{v}$$

gesetzt und als alternierende Kovariante des Vektors $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden. Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung wird in nächster Ziffer der Vektorcharakter von $D\mathfrak{v}$ auch im Sinne der Transformationstheorie nachgewiesen. Zunächst aber soll $D\mathfrak{v}$ berechnet werden: hierzu hat man die ersten und zweiten Differentiale

der Maßzahlen von $\mathfrak{v}$ in der durch (77) vorgeschriebenen Weise zu bilden:

$$d_1 v^i = -\sum_k d_1 b^i_k v^k;$$

$$d_2 d_1 v^i = -\sum_k d_2 d_1 b^i_k v^k + \sum_{kl} d_1 b^i_k d_2 b^k_l v^l.$$

Damit erhält man für die Maßzahlen von $D\mathfrak{v}$ nach einer Indexvertauschung

$$d_2 d_1 v^i - d_1 d_2 v^i = \sum_l [-d_2 d_1 b^i_l + d_1 d_2 b^i_l + \sum_k (d_1 b^i_k d_2 b^k_l - d_2 b^i_k d_1 b^k_l)] v^l. \tag{78}$$

Die Änderung von $\mathfrak{v}$ bei Übertragung um das Parallelogramm ist also bei Verwendung der alten Basis in P

$$D\mathfrak{v} = \sum_{il} [-d_2 d_1 b^i_l + d_1 d_2 b^i_l + \sum_k (d_1 b^i_k d_2 b^k_l - d_2 b^i_k d_1 b^k_l)] v^l \mathfrak{e}_i. \tag{79}$$

259. Vektorcharakter der alternierenden Kovariante eines Vektors. Da die alternierende Kovariante $D\mathfrak{v}$ des Vektors $\mathfrak{v}$ ihrer Natur nach (als Differenz zweier Vektoren an der gleichen Stelle) ein Vektor ist, verhält sie sich auch transformationstechnisch als Vektor, d. h. die Maßzahlen von $D\mathfrak{v}$ in (79) sind kontravariante Größen.

Um das auch formal zu beweisen, muß man sich zunächst erinnern, daß die relativen Änderungen dv^i der Maßzahlen eines Vektors

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{e}_i v^i$$

kein System kontravarianter Größen bilden. Geht man vielmehr zu einer neuen Basis $\bar{\mathfrak{e}}_i$ am gleichen Ort P über, bringt also den Vektor $\mathfrak{v}$ in die Form

$$\mathfrak{v} = \sum \bar{\mathfrak{e}}_i \overline{v^i},$$

so gelten für die Transformation der Maßzahlen die Formeln

$$\overline{v^i} = \sum c^i_k v^k. \tag{80}$$

Für die Transformation der Differentiale der Maßzahlen bei linearer Übertragung des Vektors $\mathfrak{v}$ von P nach P_1 gelten die Formeln (Ziff. 244)

$$d_1 \overline{v^i} = \sum_k d_1 c^i_k v^k + \sum_k c^i_k d_1 v^k$$

Für die Transformation der zweiten Differentiale der Maßzahlen bei linearer Übertragung des Vektors $\mathfrak{v}$ von P_1 nach P^* gilt

$$d_2 d_1 \overline{v^i} = \sum_k d_2 d_1 c^i_k v^k + \sum d_1 c^i_k d_2 v^k + \sum d_2 c^i_k d_1 v^k + \sum c^i_k d_2 d_1 v^k.$$

Bildet man ebenso $d_1 d_2 \overline{v^i}$ und hierauf die Differenz $(d_2 d_1 - d_1 d_2)\overline{v^i}$, so fallen auf der rechten Seite die mittleren Summanden heraus:

$$(d_2 d_1 - d_1 d_2)\overline{v^i} = \sum_k [(d_2 d_1 - d_1 d_2) c^i_k] v^k + \sum_k c^i_k (d_2 d_1 - d_1 d_2) v^k.$$

Die Größen c^i_k sind eindeutige skalare Funktionen des Ortes, die Reihenfolge der Differentiationen d_1 und d_2 ist also bei Anwendung auf die c^i_k vertauschbar; es verschwindet daher die erste Summe der rechten Seite. Die Größen $(d_2 d_1 - d_1 d_2) v^i$ transformieren sich wie die v^i selbst (80), bilden also ein System kontravarianter Größen:

$$(d_2 d_1 - d_1 d_2)\overline{v^i} = \sum_k c^i_k (d_2 d_1 - d_1 d_2) v^k. \tag{81}$$

260. Krümmungstensor. Nachdem der Vektorcharakter von $D\mathfrak{v}$ nachgewiesen und die Maßzahlen von $D\mathfrak{v}$ als kontravariante Größen erkannt sind, folgt aus (79), daß die Größen

$$R^i_l = -(d_2 d_1 b^i_l - d_1 d_2 b^i_l) + \sum_k (d_1 b^i_k d_2 b^k_l - d_2 b^i_k d_1 b^k_l) \tag{82}$$

die gemischtvarianten Maßzahlen eines Tensors zweiter Stufe

$$\tau = \sum_{il} R^i_l \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^l \tag{83}$$

sind. Man kann dann $D\mathfrak{v}$ in die Gestalt

$$D\mathfrak{v} = \sum_{il} R^i_l v^l \mathfrak{e}_i$$

$$= \sum_{il} R^i_l \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^l \cdot \sum_k v^k \mathfrak{e}_k$$

oder

$$D\mathfrak{v} = \tau \cdot \mathfrak{v} \tag{84}$$

setzen.

Bei der linearen Übertragung um ein infinitesimales Viereck erleidet das Vektorbündel $\mathfrak{v}$ eine Veränderung $D\mathfrak{v}$, die durch Multiplikation mit der Dyade τ vermittelt wird. Diese Veränderung kann nur in einer Drehung bestehen, da bei der linearen Übertragung die Längen und Winkel erhalten bleiben.

Bezieht man die Dyade τ vollständig auf die kontravariante Basis:

$$\tau = \sum_{il} R^i_l \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^l = \sum_{il} R_{il} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l,$$

wo

$$R_{il} = \sum g_{ij} R^j_l$$

ist, so folgt aus der Antisymmetrie von τ (Ziff. 243)

$$R_{il} = -R_{li}.$$

Man kann also τ in die Gestalt

$$\tau = \sum_{il} R_{il} (\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l - \mathfrak{e}^l \mathfrak{e}^i) \tag{85}$$

setzen, wobei die Summation so auszuführen ist, daß in R_{il} die Kombinationen der Indizes zu zweien (nicht die Variationen) auftreten.

Führt man in (82) die Differentiationen aus unter Einführung der Differentiale du^k der Parameter, so wird (83)

$$\tau = \sum_{il,\varrho\sigma} R^i_{l,\varrho\sigma} d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}^l.$$

Dabei sind die Größen $R^i_{l,\varrho\sigma}$ Maßzahlen eines Tensors vierter Stufe und hinsichtlich der Indizes ϱ, σ kovariant.

Da nach (82) R^i_l bei Vertauschung der Indizes 1 und 2 sein Zeichen ändert, kann es in die Form

$$R^i_l = \sum_{il,\varrho\sigma} R^i_{l,\varrho\sigma}(d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma - d_2 u^\varrho d_1 u^\sigma)$$

gesetzt werden, wobei die Summation nach den Indizes ϱ, σ so auszuführen ist, daß die Kombinationen je zweier von ihnen auftreten. Zieht man noch den Index i herunter und führt die vierfach kovarianten Maßzahlen

$$R_{il,\varrho\sigma} = \sum_j g_{ij} R^j_{l,\varrho\sigma}$$

ein, so wird τ nach (85)

$$\tau = \sum_{il,\varrho\sigma} R_{il,\varrho\sigma}(d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma - d_2 u^\varrho d_1 u^\sigma)(\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l - \mathfrak{e}^l \mathfrak{e}^i). \tag{86}$$

Die Dyade τ erscheint hier in Komponenten zerlegt, welche planare Dyaden je zweier Grundvektoren $\mathfrak{e}^i$, $\mathfrak{e}^l$ sind; jede derartige Komponente bringt eine Komponente der Drehung des Vektorbündels $\mathfrak{v}$ hervor, bei der die Änderungen der Vektoren $\mathfrak{v}$ komplanar zu $\mathfrak{e}^i$, $\mathfrak{e}^l$ sind.

Wegen der doppelten Antisymmetrie der Dyade τ verschwinden alle Maßzahlen $R_{il,\varrho\sigma}$, in denen die beiden Indizes der ersten Gruppe oder der zweiten Gruppe einander gleich sind:

$$R_{ii,\varrho\sigma} = 0, \quad R_{il,\varrho\varrho} = 0,$$

während für die nicht verschwindenden Maßzahlen die Beziehungen

$$R_{il,\varrho\sigma} = -R_{li,\varrho\sigma}, \quad R_{il,\varrho\sigma} = -R_{il,\sigma\varrho} \tag{87}$$

gelten.

Die Differenz $d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma - d_2 u^\varrho d_1 u^\sigma$ kann als doppeltskalares Produkt zweier planarer Dyaden betrachtet werden:

$$d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma - d_2 u^\varrho d_1 u^\sigma = \frac{1}{2}(\mathfrak{e}^\varrho \mathfrak{e}^\sigma - \mathfrak{e}^\sigma \mathfrak{e}^\varrho) \cdot\cdot (d_2 \mathfrak{s}\, d_1 \mathfrak{s} - d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s}).$$

Dabei bedeuten

$$d_1 \mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_\lambda d_1 u^\lambda, \quad d_2 \mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_\mu d_2 u^\mu$$

die Seiten PP_1 und PP_2 des umfahrenen infinitesimalen Vierecks. Dieses wird nach Stellung und Größe durch die planare Dyade

$$d\omega = \frac{1}{2}(d_2 \mathfrak{s}\, d_1 \mathfrak{s} - d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s})$$

bestimmt.

Mithin wird

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{il,\varrho\sigma} R_{il,\varrho\sigma} (\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l - \mathfrak{e}^l \mathfrak{e}^i)(\mathfrak{e}^\varrho \mathfrak{e}^\sigma - \mathfrak{e}^\sigma \mathfrak{e}^\varrho) \cdot\cdot (d_2 \mathfrak{s}\, d_1 \mathfrak{s} - d_1 \mathfrak{s}\, d_2 \mathfrak{s}). \quad (88)$$

Die Dyade τ, welche die bei der Drehung des Vektorbündels eintretende Veränderung bestimmt, ist das doppelt skalare Produkt aus einem Tensor vierter Stufe, dem Krümmungstensor:

$$\varkappa = \sum_{il,\varrho\sigma} R_{il,\varrho\sigma} (\mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^l - \mathfrak{e}^l \mathfrak{e}^i)(\mathfrak{e}^\varrho \mathfrak{e}^\sigma - \mathfrak{e}^\sigma \mathfrak{e}^\varrho), \quad (89)$$

der nur eine Funktion des Ortes ist, und der planaren Dyade $d\omega$, welche das umfahrene infinitesimale Viereck charakterisiert. Somit wird die Dyade der Drehung des Vektorbündels

$$\tau = \varkappa \cdot\cdot d\omega. \quad (90)$$

Die durch die alternierende Kovariante $D\mathfrak{v}$ gegebene Änderung der Vektoren des Bündels ist

$$D\mathfrak{v} = \tau \cdot \mathfrak{v} = (\varkappa \cdot\cdot d\omega) \cdot \mathfrak{v}. \quad (91)$$

In (86), (88) beziehen sich die Indizes i, l der Maßzahlen $R_{il,\varrho\sigma}$, wie schon erwähnt, auf die Komponenten der die Drehung vermittelnden Dyade τ, die Indizes ϱ, σ auf die Komponenten der planaren Dyade, welche das umfahrene Viereck bestimmt. Im Krümmungstensor erscheint dieser Unterschied nach Abspaltung des Faktors $d\omega$ verwischt.

261. Berechnung des Krümmungstensors bei geodätischer Übertragung. Für die Maßzahlen R^i_l der die Drehung vermitteln-Dyade τ erhält man bei Einführung der Parameterdifferentiale du^k

$$R^i_l = \sum_{\varrho\sigma} \left[-\left(\frac{\partial}{\partial u^\sigma} \frac{\partial b^i_l}{\partial u^\varrho} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho} \frac{\partial b^i_l}{\partial u^\sigma} \right) + \sum_k \left(\frac{\partial b^i_k}{\partial u^\varrho} \frac{\partial b^k_l}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial b^i_k}{\partial u^\sigma} \frac{\partial b^k_l}{\partial u^\varrho} \right) \right] du^\varrho du^\sigma.$$

Bei geodätischer Übertragung wird hieraus nach Einführung der Christoffelschen Symbole:

$$R^i_l = \sum_{\varrho\sigma} \left[-\left(\frac{\partial}{\partial u^\sigma} \begin{Bmatrix} l\varrho \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^\varrho} \begin{Bmatrix} l\sigma \\ i \end{Bmatrix} \right) + \sum_k \left(\begin{Bmatrix} k\varrho \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l\sigma \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\sigma \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l\varrho \\ k \end{Bmatrix} \right) \right] du^\varrho du^\sigma. \quad (92a)$$

Die Faktoren von $d_1 u^\varrho d_2 u^\sigma$ sind die Maßzahlen $R^i_{l,\varrho\sigma}$. Man erkennt die Identität des Krümmungstensors mit dem (Ziff. 256) durch formale Operationen erhaltenen Tensor 4. Stufe. Die Maßzahlen $R_{il,\varrho\sigma}$ des Krümmungstensors $\varkappa$ ergeben sich durch Herunterziehen des Index i:

$$R_{il,\varrho\sigma} = \sum_j g_{ij} R^j_{l,\varrho\sigma}.$$

Die etwas mühsame Ausführung dieser Summation, die indessen nichts verlangt als die Gleichungen (50) für den Zusammenhang zwischen Christoffelschen Symbolen erster und zweiter Art, gibt

$$R_{il,\varrho\sigma} = \frac{\partial}{\partial u^\varrho}\begin{bmatrix} l\,\sigma \\ i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^\sigma}\begin{bmatrix} l\,\varrho \\ i \end{bmatrix} - \sum_k \left(\begin{bmatrix} \varrho\, i \\ k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,\sigma \\ k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma\, i \\ k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,\varrho \\ k \end{Bmatrix}\right). \quad (92\,\mathrm{b})$$

Für die geodätische Übertragung gilt die Beziehung

$$R_{il,\varrho\sigma} = R_{\varrho\sigma,il}. \quad (93)$$

Der Nachweis erfordert das Anschreiben der Christoffelschen Symbole.

262. Krümmungstensor einer Fläche. Für eine (zweidimensionale) Fläche reduziert sich der Krümmungstensor auf

$$\varkappa = R_{12,12}(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1)(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1).$$

Die in ihm auftretende einzige Maßzahl $R_{12,12}$ ist keine Invariante, sondern hängt von der Wahl der Basis ab. Zu einer skalaren Invariante des Linienelements der Fläche (Biegungsinvariante der Fläche) gelangt man durch zweimalige Verjüngung des Krümmungstensors $\varkappa$.

Um zu einer nicht identisch verschwindenden Verjüngung von $\varkappa$ zu kommen, ersetzt man die unbestimmte Multiplikation der beiden planaren Dyaden in $\varkappa$ durch die skalare Multiplikation.

$$\begin{aligned}\varkappa_{\mathrm{I}} &= R_{12,12}(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1)\cdot(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1) \\ &= R_{12,12}(-g^{22}\mathrm{e}^1\mathrm{e}^1 + g^{12}(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1) - g^{11}\mathrm{e}^2\mathrm{e}^2).\end{aligned}$$

Durch Übergang zu den kovarianten Maßzahlen g_{ik} wird nach (28)

$$\varkappa_{\mathrm{I}} = -\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}(g_{11}\mathrm{e}^1\mathrm{e}^1 + g_{12}(\mathrm{e}^1\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2\mathrm{e}^1) + g_{22}\mathrm{e}^2\mathrm{e}^2)$$

oder nach (26)

$$\varkappa_{\mathrm{I}} = -\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,I.$$

Die erste Verjüngung des Krümmungstensors unterscheidet sich also von dem metrischen Fundamentaltensor um einen skalaren Faktor, der invariant ist. Nochmalige Verjüngung würde das Doppelte dieses skalaren Faktors als skalare Invariante ergeben.

Die Invariante

$$K = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \quad (94)$$

ist nichts anderes als das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche, wie im folgenden gezeigt wird.

263. Gaußsche Krümmung einer Fläche. Bei der Übertragung eines der Fläche angehörigen Vektorbüschels um ein infinitesimales Viereck der Fläche wird das Vektorbüschel um einen Winkel $d\varepsilon$ gedreht; jeder Vektor $\mathfrak{v}$ erleidet dabei eine Veränderung, die durch

$$D\mathfrak{v} = (\varkappa \cdot\cdot d\omega) \cdot \mathfrak{v}$$

gemessen wird. Nach (88) und (91) ist

$$D\mathfrak{v} = \frac{1}{2} R_{12,12} [(\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1)(\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1) \cdot\cdot (d_2\mathfrak{s}\, d_1\mathfrak{s} - d_1\mathfrak{s}\, d_2\mathfrak{s})] \cdot \mathfrak{v}$$

$(\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1)$ und $(d_2\mathfrak{s}\, d_1\mathfrak{s} - d_1\mathfrak{s}\, d_2\mathfrak{s})$ sind im gleichen Punkt P der Fläche definierte planare Dyaden; sie unterscheiden sich nur um einen skalaren Faktor. Die Reihenfolge der Faktoren kann also geändert werden; es wird

$$D\mathfrak{v} = \frac{1}{2} R_{12,12} (\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1) \cdot\cdot (\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1)(d_2\mathfrak{s}\, d_1\mathfrak{s} - d_1\mathfrak{s}\, d_2\mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{v}. \tag{95}$$

Nun ist

$$(\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1) \cdot\cdot (\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2 - \mathfrak{e}^2\mathfrak{e}^1) = (g^{12})^2 - g^{11}g^{22} = \frac{1}{(g_{12})^2 - g_{11}g_{22}}. \tag{96}$$

Um $(d_2\mathfrak{s}\, d_1\mathfrak{s} - d_1\mathfrak{s}\, d_2\mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{v}$ geometrisch zu deuten, kann man auf das Vektorprodukt

$$d_1\mathfrak{s} \times d_2\mathfrak{s} = \mathfrak{N}\, dF$$

zurückgreifen, wo dF der Flächeninhalt des umfahrenen Vierecks, $\mathfrak{N}$ der Einheitsvektor der zugehörigen positiven Normalen ist; setzt man dann

$$\mathfrak{N} \times \mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}},$$

so bedeutet $\bar{\mathfrak{v}}$ einen Vektor vom gleichen Betrag wie $\mathfrak{v}$, der ebenso wie $\mathfrak{v}$ der Tangentialebene der Fläche in P angehört und aus $\mathfrak{v}$ durch eine Drehung im positiven Sinn um einen rechten Winkel erhalten wird. Mithin ist $\bar{\mathfrak{v}}$ kollinear zu $D\mathfrak{v}$ und in der zwischen diesen beiden Vektoren bestehenden Beziehung

$$D\mathfrak{v} = -d\varepsilon\, \bar{\mathfrak{v}} \tag{97}$$

tritt der Drehwinkel $d\varepsilon$ auf (Fig. 74).

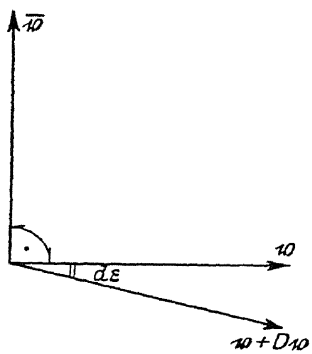


Fig. 74.

Um $d\varepsilon$ zu berechnen, kann man

$$(d_1\mathfrak{s} \times d_2\mathfrak{s}) \times \mathfrak{v} = (\mathfrak{N} \times \mathfrak{v})\, dF = \bar{\mathfrak{v}}\, dF$$

bilden; nach dem Entwicklungsgesetz folgt

$$(d_2\mathfrak{s}\, d_1\mathfrak{s} - d_1\mathfrak{s}\, d_2\mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}\, dF. \tag{98}$$

Setzt man (96), (97), (98) in (95) ein, so ergibt sich

$$d\varepsilon = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, dF. \tag{99}$$

Da nach (76)

$$\frac{d\varepsilon}{dF} = K$$

das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche ist, ist die in voriger Ziffer aufgestellte Behauptung bewiesen, daß die skalare Invariante $\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$ mit dem Gaußschen Krümmungsmaß übereinstimmt.

264. Verjüngungen des Krümmungstensors im R_n. Verjüngt man den Krümmungstensor

$$\varkappa = \sum R_{il,\varrho\sigma} \mathrm{e}^i \mathrm{e}^l \mathrm{e}^\varrho \mathrm{e}^\sigma$$

nach l und ϱ, so erhält man eine Dyade

$$\begin{aligned} \varkappa_{\mathrm{I}} &= \sum R_{il,\varrho\sigma} \mathrm{e}^i \mathrm{e}^l \cdot \mathrm{e}^\varrho \mathrm{e}^\sigma \\ &= \sum R_{il,\varrho\sigma} g^{l\varrho} \mathrm{e}^i \mathrm{e}^\sigma. \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften (87), (93) der $R_{il,\varrho\sigma}$ folgt, daß $\varkappa_{\mathrm{I}}$ eine symmetrische Dyade ist, wenn geodätische Übertragung vorausgesetzt ist.

Durch Einführung der $R^i_{l,\varrho\sigma}$ kann man $\varkappa_{\mathrm{I}}$ in die Form

$$\varkappa_{\mathrm{I}} = \sum R^\varrho_{i,\sigma\varrho} \mathrm{e}^i \mathrm{e}^\sigma \tag{100}$$

setzen. In dieser Form spielt die Verjüngung des Krümmungstensors eine Rolle in der Relativitätstheorie.

Die zweite Verjüngung des Krümmungstensors ist die skalare Invariante

$$K_0 = \sum R_{il,\varrho\sigma} g^{l\varrho} g^{i\sigma} = \sum R^\varrho_{i,\sigma\varrho} g^{i\sigma} = \sum R^{\varrho\, i}_{i\varrho}. \tag{101}$$

Sie bestimmt das Krümmungsmaß des Raumes.

265. Verschwindender Krümmungstensor. Das Verschwinden des Krümmungstensors ist notwendig und hinreichend dafür, daß die lineare Übertragung integrabel ist, d. h. daß ein Vektorbündel beim Umfahren einer unendlichkleinen oder endlichen Kurve in seine Ausgangslage zurückkehrt.

In einem Euklidischen Raum mit dem Linienelement

$$ds^2 = \sum (dx^i)^2 \tag{102}$$

verschwindet der Krümmungstensor jedenfalls, wenn geodätische Übertragung vorausgesetzt ist; denn aus der Konstanz der Maßzahlen g_{ik} des Fundamentaltensors folgt das Verschwinden sämtlicher Christoffelscher Symbole und damit das Verschwinden der Maßzahlen $R_{il,\varrho\sigma}$ des Krümmungstensors. Das Verschwinden des Krümmungstensors wird dadurch nicht aufgehoben, daß

man die Fundamentalform des Euklidischen Raumes durch Einführung einer neuen, von Ort zu Ort veränderlichen Basis auf die Form

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, du^i\, du^k$$

bringt.

Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden des Krümmungstensors bei geodätischer Übertragung, des sogenannten Riemann-Christoffelschen Tensors, daß der Raum euklidisch ist. Soll das vektorielle Linienelement

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{e}_i\, du^i$$

einem Euklidischen Raum angehören, so muß es auf die Form

$$d\mathfrak{s} = \sum \mathfrak{i}_\lambda\, dx^\lambda = \sum \mathfrak{i}_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^i}\, du^i$$

gebracht werden können, wo die Grundvektoren $\mathfrak{i}_\lambda$ ein n-Bein bilden und konstant sind, d. h. verschwindende absolute Differentiale besitzen. Die Basisvektoren $\mathfrak{e}_i$ werden hiernach

$$\mathfrak{e}_i = \sum \mathfrak{i}_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^i}; \tag{103}$$

und ihre absoluten Differentialquotienten lassen sich nun in doppelter Weise herstellen: einerseits ergibt die allgemeine Theorie nach Ziff. 251 (57)

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u^l} = \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \mathfrak{e}_k = \sum_{k\lambda} \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^k}\, \mathfrak{i}_\lambda;$$

anderseits folgt aus der speziellen Form (103) der $\mathfrak{e}_i$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial u^l} = \sum_\lambda \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^i\, \partial u^l}\, \mathfrak{i}_\lambda.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten ergibt sich für die Koordinaten x^λ folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^i\, \partial u^l} = \sum_k \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^k}. \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n) \tag{104}$$

Dieses System muß nun integrabel sein; hierzu ist notwendig, daß die dritten Differentialquotienten der x^λ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen sind. Es muß also

$$\frac{\partial^3 x^\lambda}{\partial u^i\, \partial u^l\, \partial u^m} = \frac{\partial^3 x^\lambda}{\partial u^i\, \partial u^m\, \partial u^l}$$

sein. Drückt man die dritten Differentialquotienten der x^λ nach (104) durch die zweiten und darauf durch die ersten aus, so ergibt sich

$$\sum_k \left[\frac{\partial}{\partial u^m} \begin{Bmatrix} i\,l \\ k \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^l} \begin{Bmatrix} i\,m \\ k \end{Bmatrix} + \sum_n \begin{Bmatrix} i\,l \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n\,m \\ k \end{Bmatrix} - \sum_n \begin{Bmatrix} i\,m \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n\,l \\ k \end{Bmatrix} \right] \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^k} = 0. \tag{105}$$

In diesem System von n Gleichungen (für $\lambda = 1, 2 \ldots n$) müssen die Faktoren der $\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^k}$ identisch verschwinden. Diese Faktoren sind die Maßzahlen des Riemann-Christoffelschen Tensors; sein Verschwinden ist also für Euklidische Räume charakteristisch.

In Riemannschen Räumen sind integrable Übertragungen oder Fernübertragungen erst in den letzten Jahren näher untersucht worden[1]). Eine Fernübertragung ist bestimmt, wenn es gelingt, jedem Punkt eines Riemannschen Raumes mit gegebener Metrik in einem endlichen Gebiet ein n-Bein in eindeutiger Weise zuzuordnen und eine lineare Übertragung aufzustellen, welche jedes dieser n-Beine in die infinitesimal benachbarten überführt.

Die n Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_{(\varrho)}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots n$) eines n-Beins sollen durch die n Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ ($i = 1, 2, \ldots n$) in der Form

$$\mathfrak{t}_{(\varrho)} = \sum_i h^i_{(\varrho)} \mathfrak{e}_i \tag{106}$$

linear ausgedrückt werden, wo die Maßzahlen $h^i_{(\varrho)}$ eindeutige Funktionen des Ortes sind; sie müssen wegen der Orthogonalität der Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_{(\varrho)}$ den Bedingungen

$$\sum_{ik} h^i_{(\varrho)} h^k_{(\varrho)} g_{ik} = 1; \qquad \sum_{ik} h^i_{(\varrho)} h^k_{(\sigma)} g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \neq \sigma \tag{107}$$

genügen. Dann ergibt die Bedingung der Übertragbarkeit

$$d\mathfrak{t}_{(\varrho)} = \sum_i d h^i_{(\varrho)} \mathfrak{e}_i + \sum_{ik} h^i_{(\varrho)} d b^k_i \mathfrak{e}_k = 0;$$

nach einer Vertauschung der Indizes folgen die n skalaren Gleichungen:

$$d h^k_{(\varrho)} + \sum_i h^i_{(\varrho)} d b^k_i = 0. \tag{108}$$

Hieraus kann man die Größen $d b^k_i$ berechnen und die gesuchte Übertragung bestimmen.

Bezeichnet man die reduzierten Minoren (Ziff. 210) von $h^i_{(\varrho)}$ mit $h^{(\varrho)}_i$, so ist

$$\sum_\varrho h^{(\varrho)}_i h^i_{(\varrho)} = 1; \qquad \sum_\varrho h^{(\varrho)}_l h^i_{(\varrho)} = 0 \quad \text{für} \quad l \neq i;$$

multipliziert man jetzt die Gleichungen (108) mit $h^{(\varrho)}_l$ und summiert sie nach ϱ, so ergibt sich

$$\sum_\varrho h^{(\varrho)}_l d h^k_{(\varrho)} + \sum_{\varrho i} h^{(\varrho)}_l h^i_{(\varrho)} d b^k_i = 0$$

---

1) A. Einstein, Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1928.

oder

$$db_l^k = -\sum_\varrho h_l^{(\varrho)}\, dh_{(\varrho)}^k . \tag{109}$$

Die so gefundenen Übertragungskoeffizienten db_l^k müssen dem Lemma von Ricci genügen (Ziff. 244, 37a):

$$dg_{ik} = \sum_l db_i^l g_{lk} + \sum_l db_k^l g_{il} .$$

Durch Einsetzen der Übertragungskoeffizienten erhält man die Bedingungen

$$dg_{ik} + \sum_{\varrho l} \left[h_i^{(\varrho)} g_{kl} + h_k^{(\varrho)} g_{il}\right] dh_{(\varrho)}^l = 0 .$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit $h_{(\sigma)}^i$ und $h_{(\tau)}^k$ und Summation nach i und k folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{ik} h_{(\sigma)}^i h_{(\tau)}^k dg_{ik} + \sum_{kl} h_{(\tau)}^k g_{kl}\, dh_{(\sigma)}^l + \sum_{il} h_{(\sigma)}^i g_{il}\, dh_{(\tau)}^l = 0$$

oder nach einer Indexvertauschung

$$d \sum_{ik} h_{(\sigma)}^i h_{(\tau)}^k g_{ik} = 0 . \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots n) \tag{110}$$

Diese Bedingungen sind nach (107) von selbst erfüllt.

Jetzt ist noch der Nachweis zu erbringen, daß für die im Riemannschen Raum durch (109) definierte lineare Übertragung der Krümmungstensor des Riemannschen Raumes verschwindet. Man hat zunächst in (82)

$$R_l^i = -d_2 d_1 b_l^i + d_1 d_2 b_l^i + \sum_k \left(d_1 b_k^i d_2 b_l^k - d_2 b_k^i d_1 b_l^k\right)$$

die aus (109) folgenden Werte von db_l^k einzusetzen. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} R_l^i = &\sum_{\varrho,\, \sigma\tau} \left[h_l^{(\varrho)} \frac{\partial^2 h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\tau \partial u^\sigma} - h_l^{(\varrho)} \frac{\partial^2 h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} + \frac{\partial h_l^{(\varrho)}}{\partial u^\tau} \frac{\partial h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial h_l^{(\varrho)}}{\partial u^\sigma} \frac{\partial h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\tau}\right] du^\sigma du^\tau \\ &+ \sum_{\varrho\omega,\, k,\, \sigma\tau} \left[h_k^{(\varrho)} \frac{\partial h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\sigma} h_l^{(\omega)} \frac{\partial h_{(\omega)}^k}{\partial u^\tau} - h_k^{(\varrho)} \frac{\partial h_{(\varrho)}^i}{\partial u^\tau} h_l^{(\omega)} \frac{\partial h_{(\omega)}^k}{\partial u^\sigma}\right] du^\sigma du^\tau . \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

R_l^i erscheint in der Form

$$R_l^i = \sum_{\sigma\tau} R_{l,\,\sigma\tau}^i\, du^\sigma du^\tau , \tag{112}$$

in der die Größen $R_{l,\,\sigma\tau}^i$ die Maßzahlen des Krümmungstensors sind; sie müssen sämtlich verschwinden. Das ist auch tatsächlich der Fall. Zunächst bemerkt man, daß die Glieder mit den zweiten Differentialquotienten von $h_{(\varrho)}^i$ hinausfallen. Sodann kann man die letzte Summe

in bemerkenswerter Weise umformen. Die Größen $h^k_{(\omega)}$ hängen als reduzierte Minoren der $h^{(\omega)}_k$ mit diesen durch die Gleichungen $\sum\limits_{\omega} h^{(\omega)}_k h^k_{(\omega)} = 1$ und $\sum\limits_{\omega} h^{(\omega)}_l h^k_{(\omega)} = 0$ für $k \neq l$ zusammen; also ist jedenfalls (für $k = l$ und für $k \neq l$)

$$\sum_{\omega} h^{(\omega)}_l \frac{\partial h^k_{(\omega)}}{\partial u^\tau} = -\sum_{\omega} h^k_{(\omega)} \frac{\partial h^{(\omega)}_l}{\partial u^\tau}.$$

Damit wird in der letzten Summe in (111)

$$\sum_{\varrho\,\omega,\,k} h^{(\varrho)}_k \frac{\partial h^i_{(\varrho)}}{\partial u^\sigma} h^{(\omega)}_l \frac{\partial h^k_{(\omega)}}{\partial u^\tau} = -\sum_{\varrho\,\omega,\,k} h^{(\varrho)}_k \frac{\partial h^i_{(\varrho)}}{\partial u^\sigma} h^k_{(\omega)} \frac{\partial h^{(\omega)}_l}{\partial u^\tau} = -\sum_{\varrho} \frac{\partial h^i_{(\varrho)}}{\partial u^\sigma} \frac{\partial h^{(\varrho)}_l}{\partial u^\tau}.$$

Dieses Glied kommt aber mit positivem Vorzeichen in der ersten Summe in (111) vor. Damit ist das Verschwinden aller Größen $R^i_{l,\,\sigma\tau}$ bewiesen.

Damit sind aber alle Fernübertragungen in einem Riemannschen Raum bestimmt. Man hat ein System von Größen $h^i_{(\varrho)}$ aufzustellen, das den Gleichungen (107) genügt, und aus diesen Größen nach (109) die Übertragungskoeffizienten db^k_l zu berechnen.

Kapitel 8. Komplexe Zahlen.

§ 1. Eigenschaften der allgemeinen komplexen Zahlen.

266. Arithmetische Einführung komplexer Zahlen. Die Theorie der Vektoren läßt sich arithmetisch begründen, wenn man die Vektoren als ein spezielles System von komplexen Zahlen höherer Art oder von extensiven Größen auffaßt. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen werden bekanntlich nach dem Vorgang von Hamilton arithmetisch als Zahlenpaare eingeführt. Für diese Zahlenpaare werden die algebraischen Operationen derart festgesetzt, daß für das Rechnen mit Größenpaaren dieselben formalen Gesetze gelten wie für das Rechnen mit gewöhnlichen reellen Zahlen.

In Erweiterung des Hamiltonschen Gedankens kann man als komplexe Zahlen höherer Art Anordnungen von n reellen oder gewöhnlichen komplexen Zahlen einführen und versuchen, algebraische Operationen mit diesen Größen derart festzusetzen, daß die formalen Gesetze des Rechnens mit reellen Zahlen nach Möglichkeit erhalten bleiben.

Die Summe zweier komplexer Zahlen gleicher Art $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ und $(b_1, b_2, \cdots b_n)$ wird definiert als diejenige komplexe Zahl derselben Art, deren Elemente die Summen gleichstehender Elemente der beiden gegebenen komplexen Zahlen sind:

$$(a_1, a_2, \cdots a_n) + (b_1, b_2, \cdots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots a_n + b_n).$$

Die so definierte Addition ist assoziativ, kommutativ und in Verbindung mit der Multiplikation mit gewöhnlichen Zahlen distributiv. Sie läßt als Umkehrung eine eindeutige Subtraktion zu.

Aus n beliebig gewählten linear unabhängigen komplexen Zahlen von n Elementen läßt sich ein System komplexer Zahlen aufbauen, indem man die gewählten komplexen Zahlen additiv mit reellen oder gewöhnlichen komplexen Koeffizienten zusammensetzt. Bezeichnet man die n gewählten komplexen Zahlen abkürzend mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \cdots \mathfrak{e}_n$, so kann jede komplexe Zahl des Systems auf die Form

$$x_1 \mathfrak{e}_1 + x_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n \quad .$$

gebracht werden. Die Gesamtheit der Zahlen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots \mathfrak{e}_n$ wird als Basis des Systems bezeichnet; $x_1\mathfrak{e}_1, x_2\mathfrak{e}_2 \cdots x_n\mathfrak{e}_n$ heißen Komponenten der komplexen Zahl, $x_1, x_2, \cdots x_n$ ihre Maßzahlen.

Komplexe Zahlen sollen wie die Basiszahlen im allgemeinen mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden:

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n.$$

Zwischen höchstens $n + 1$ komplexen Zahlen des Systems besteht eine lineare Gleichung. Die Wahl von n linear unabhängigen Zahlen als neue Basis wird als lineare Transformation der Basis bezeichnet.

267. Multiplikation. Unter allen Systemen komplexer Zahlen sind die gewöhnlichen komplexen Zahlen die einzigen, für die die Produktbildung so definiert werden kann, daß alle formalen Rechengesetze genau so gelten wie für die reellen Zahlen (Weierstraß).

Die verschiedenen Möglichkeiten der Definition des Produkts und die daraus folgenden verschiedenen Gesetze der Multiplikation unterscheiden endgültig die verschiedenen Systeme komplexer Zahlen voneinander. Für die Eigenschaften eines Systems komplexer Zahlen macht es einen wesentlichen Unterschied aus, ob man fordert, daß das Produkt zweier komplexer Zahlen eine komplexe Zahl des gleichen Systems ist, oder ob man auf diese Forderung verzichtet. Komplexe Zahlen der letzten Art werden vielfach als extensive Größen bezeichnet.

Für komplexe Zahlen im engeren Sinn hat also das Produkt zweier Basiszahlen stets die Form

$$\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k = \sum c_{ik\lambda}\mathfrak{e}_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

während für extensive Größen das Produkt $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k$ als extensive Größe zweiter Stufe aufgefaßt wird, wenn ihm nicht ein skalarer Wert beigelegt werden soll.

Für komplexe Zahlen wie für extensive Größen wird die Gültigkeit des distributiven Gesetzes der Multiplikation in Verbindung mit der Addition stets gefordert:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\mathfrak{z},$$
$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z} + \mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

Das assoziative Gesetz wird für komplexe Zahlen im engeren Sinn stets, für extensive Größen nicht immer gefordert. Die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes kann im allgemeinen nicht mehr verlangt werden.

268. Division. Bei der Division als Umkehrung der Multiplikation ist bei Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes die Bestimmung des ersten Faktors von der des zweiten zu unterscheiden. Beide Arten der Division sind im allgemeinen eindeutig ausführbar in solchen Systemen komplexer Zahlen, welche eine „Haupteinheit“ enthalten. Unter Haupteinheit ist eine komplexe Zahl $\mathfrak{e}$ zu verstehen, die den Gleichungen

$$\mathfrak{e}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{e} = \mathfrak{x} \tag{2}$$

für alle $\mathfrak{x}$ genügt, also insbesondere auch die Gleichung

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \tag{2'}$$

erfüllt.

Führt man die Haupteinheit als eine der Basiszahlen $\mathfrak{e}_i$ ein und bezeichnet sie für den Augenblick mit $\mathfrak{e}_1$, so definieren die Gleichungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_1$$

zwei im allgemeinen verschiedene reziproke Werte der Zahl $\mathfrak{a}$. Um etwa die erste dieser Gleichungen aufzulösen, setzt man

$$\mathfrak{a} = \sum_i a_i \mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{x} = \sum_k x_k \mathfrak{e}_k;$$

man erhält dann unter Verwendung des Multiplikationsgesetzes (1) zur Bestimmung der Maßzahlen x_k die Gleichung

$$\sum_{ik\lambda} a_i x_k c_{ik\lambda} \mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_1.$$

Diese Gleichung zerfällt in folgendes System von n skalaren Gleichungen:

$$\sum_k x_k \sum_i a_i c_{ik1} = 1,$$
$$\sum_k x_k \sum_i a_i c_{ik\lambda} = 0 \quad \text{für } \lambda = 2, 3, \cdots n.$$

Dieses System genügt zur eindeutigen Bestimmung der x_k, wenn seine Determinante von Null verschieden ist; also:

$$\left| \sum_i a_i c_{ik\lambda} \right| \neq 0. \tag{3}$$

Es existiert also im allgemeinen ein (erster) reziproker Wert einer komplexen Zahl $\mathfrak{a}$, der der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{e}_1$ genügt. Doch ist es bei fast allen Systemen komplexer Zahlen möglich, die a_i reell oder als gewöhnliche komplexe Zahlen so zu wählen, daß die Determinante (3) verschwindet und damit für gewisse Zahlen $\mathfrak{a}$ die Bildung des reziproken Wertes unmöglich oder nicht eindeutig wird.

Zur Bildung des Quotienten zweier beliebiger komplexer Zahlen ist jetzt, wenn die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes vor-

ausgesetzt wird, keine weitere Festsetzung mehr notwendig. Um $\mathfrak{x}$ aus der Gleichung

$$\mathfrak{x}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

zu berechnen, multipliziert man sie von rechts mit $\mathfrak{a}^{-1}$ und erhält:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{a})\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{x}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}) = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$$

oder

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}.$$

Bei Systemen ohne Haupteinheit ist eine eindeutige Division niemals möglich.

269. Systeme von n^2 Einheiten. Von besonderer Wichtigkeit und Einfachheit sind Systeme von n^2 Einheiten $\mathfrak{e}_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \cdots n)$, die dem Multiplikationsgesetz

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{e}_{lm} &= 0 \quad (k \neq l), \\ \mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{e}_{km} &= \mathfrak{e}_{im} \end{aligned} \tag{4}$$

genügen. Man erkennt, daß jedes derartige System eine Haupteinheit

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{22} + \cdots + \mathfrak{e}_{nn} \tag{5}$$

besitzt, die die Bedingungen (2) und (2′) erfüllt. Alle derartigen Systeme lassen also eine im allgemeinen eindeutige Division zu.

Zwischen höchstens $n^2 + 1$ Zahlen eines Systems von n^2 Einheiten besteht stets eine lineare Gleichung mit reellen oder gewöhnlichen komplexen Koeffizienten. Wählt man in einem System von n^2 Einheiten, die dem Multiplikationsgesetz (4) genügen, eine Reihe aufeinanderfolgender Potenzen einer Zahl $\mathfrak{x}$, so besteht nicht erst zwischen $n^2 + 1$, sondern bereits zwischen $n + 1$ aufeinanderfolgenden Potenzen eine lineare Gleichung, die als charakteristische Gleichung des Systems bezeichnet wird. Sie wird gewöhnlich in der Form einer linearen Gleichung zwischen den ersten n Potenzen von $\mathfrak{x}$ und der Haupteinheit geschrieben:

$$\mathfrak{x}^n + a_1\mathfrak{x}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathfrak{x} + a_n\mathfrak{e} = 0. \tag{6}$$

Für spezielle Zahlen $\mathfrak{x}$ kann eine Reduktion der charakteristischen Gleichung in der Weise eintreten, daß bereits zwischen weniger als $n + 1$ aufeinanderfolgenden Potenzen eine lineare Gleichung besteht; daraus folgt aber nicht in allen Fällen eine Erniedrigung des Grades der charakteristischen Gleichung.

270. Beweis der charakteristischen Gleichung. Einer komplexen Zahl von n^2 Einheiten

$$\mathfrak{x} = \sum a_{ik}\mathfrak{e}_{ik}$$

läßt sich eine skalare Zahl zuordnen, nämlich die von dem Schema ihrer Maßzahlen gebildete Determinante $|a_{ik}|$. Die Determinante der Zahl $\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{e}$, wo $\mathfrak{e} = \Sigma \mathfrak{e}_{ii}$ die Haupteinheit und λ ein skalarer Parameter ist, soll mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnet werden.

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

ist eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades in λ, deren Koeffizienten Funktionen der Maßzahlen a_{ik} von $\mathfrak{x}$ sind; abkürzend soll

$$(-1)^n \varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

gesetzt werden.

Etwas allgemeiner kann man von einer komplexen Zahl $\mathfrak{x} - \lambda$ ausgehen, in der λ selbst eine dem Zahlensystem von n^2 Elementen angehörige komplexe Zahl ist; man kann sie in die Form

$$\mathfrak{e}\mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \Sigma a_{ik} \mathfrak{e}_{ik} - \lambda \Sigma \mathfrak{e}_{ii}$$

setzen und, ohne die Multiplikation mit $\mathfrak{e}$ auszuführen, das Schema der nun komplexen Maßzahlen der rechts stehenden Einheiten $\mathfrak{e}_{ik}$ bzw. $\mathfrak{e}_{ii}$ ansetzen; dann ist

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\mathfrak{e} - \lambda & a_{12}\mathfrak{e} & \cdots & a_{1n}\mathfrak{e} \\ a_{21}\mathfrak{e} & a_{22}\mathfrak{e} - \lambda & \cdots & a_{2n}\mathfrak{e} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}\mathfrak{e} & a_{n2}\mathfrak{e} & \cdots & a_{nn}\mathfrak{e} - \lambda \end{vmatrix}$$

auf Grund des distributiven und assoziativen Gesetzes und der Eigenschaften der Haupteinheit eine ganze Funktion $n$ten Grades der komplexen Zahl λ; und zwar wird

$$(-1)^n \varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \mathfrak{e}.$$

Ersetzt man nun speziell λ durch $\mathfrak{x}$, so ist die komplexe Zahl $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{e}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}\mathfrak{e}$ identisch Null, mithin auch die in der angegebenen Weise gebildete Determinante $\varphi(\mathfrak{x})$ ihrer komplexen Maßzahlen; also ist

$$\mathfrak{x}^n + a_1 \mathfrak{x}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{x} + a_n \mathfrak{e} = 0.$$

Das ist die charakteristische Gleichung, deren Bestehen damit bewiesen ist. Auf die möglichen Reduktionen soll nicht eingegangen werden; sie hängen mit der Theorie der Elementarteiler zusammen.

§ 2. Zusammenhang mit der Vektorrechnung.

271. Vektoren und Dyaden. Die Vektoren nehmen in der Theorie der extensiven Größen eine verschiedene Stellung ein, je nach der Multiplikation, die man zuläßt.

Die skalare Multiplikation definiert die Vektoren im drei- oder allgemeiner im n-dimensionalen Raum als ein System extensiver Größen von drei bzw. n Einheiten ohne eindeutige Division.

Die vektorielle Multiplikation definiert die Vektoren im dreidimensionalen Raum als ein System komplexer Zahlen von drei Einheiten ohne Haupteinheit und also ohne eindeutige Division.

Die dyadische Multiplikation ist assoziativ; sie definiert also die Vektoren als erste Stufe eines Systems von extensiven Größen, das auf beliebig hohe Stufen (Dyaden, Tensoren) erweitert werden kann.

Die Dyaden sind bei Voraussetzung skalarer Multiplikation ein System komplexer Zahlen von n^2 Einheiten mit dem Multiplikationsgesetz (4); als Einheiten $\mathfrak{e}_{ik}$ sind die dyadischen Produkte $\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k$ zweier Vektoren eingeführt. Die Dyaden besitzen eine Haupteinheit und lassen (für rechte wie für linke Faktoren) eine im allgemeinen — nämlich für vollständige Dyaden als Divisoren — eindeutige Division zu.

272. Quaternionen. Die Hamiltonschen Quaternionen sind ein System komplexer Zahlen von vier Einheiten mit einer Haupteinheit. Als Basiszahlen sollen die mit 1 zu bezeichnende Haupteinheit und drei weitere Einheiten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gewählt und die Produkte zweier Einheiten durch folgendes Schema gegeben werden:

	1	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
1	1	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{i}$	-1	$\mathfrak{k}$	$-\mathfrak{j}$
$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{k}$	-1	$\mathfrak{i}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{j}$	$-\mathfrak{i}$	-1

(7)

Die Spalte vor dem quadratischen Schema enthält den ersten Faktor, die Zeile über dem Schema den zweiten Faktor eines jeden Produktes. Die Haupteinheit mit 1 zu bezeichnen, ist zulässig, da sie denselben Rechenregeln wie die skalare Zahl Eins genügt und von ihr nicht unterschieden werden kann, solange nur Operationen innerhalb des Systems der Quaternionen vollzogen werden.

Zunächst sollen nur Quaternionen

$$\mathfrak{p} = a_0 + a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$

mit reellen Maßzahlen a_0, a_1, a_2, a_3 (reelle Quaternionen) betrachtet werden. Jede Quaternion zerfällt formal in zwei additive Bestandteile: einen skalaren Teil a_0 und einen extensiven Teil $a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$, der als komplexe Zahl in einem System ohne Haupteinheit aufgefaßt und mit einem Vektor identifiziert werden kann. Es können also die skalaren Zahlen und ebenso die Vektoren als spezielle Quaternionen aufgefaßt werden.

Das Produkt zweier Quaternionen

$$\mathfrak{p} = a_0 + a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{q} = b_0 + b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}$$

kann unter Voraussetzung der Gültigkeit des distributiven Gesetzes berechnet werden. Es soll durch Nebeneinanderstellen der beiden Faktoren ohne besonderes Zeichen bezeichnet werden. Da unter den Quaternionen die Vektoren enthalten sind, wird also das Quaternionenprodukt zweier Vektoren geradeso bezeichnet wie bisher das dyadische. Es kommen aber bei der ohnehin nur vorübergehenden Betrachtung der Quaternionen dyadische Produkte nicht vor, so daß eine Verwechslung nicht zu befürchten ist.

Für das Produkt $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erhält man nach dem Schema (7)

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} = a_0 b_0 + a_0(b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}) + b_0(a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k})$$
$$- (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Für die Multiplikation gilt das assoziative Gesetz; auf den Beweis soll verzichtet werden. Die Nichtgültigkeit des kommutativen Gesetzes folgt schon aus dem Schema.

Bildet man nach dem gleichen Schema das Quaternionenprodukt zweier Vektoren

$$\mathfrak{v} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{w} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k},$$

so erhält man

$$\mathfrak{v}\mathfrak{w} = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$\mathfrak{v}\mathfrak{w} = -\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} + \mathfrak{v}\times\mathfrak{w}. \qquad (9)$$

Das skalare und das vektorielle Produkt zweier Vektoren erscheinen also als mit negativem Zeichen zu nehmender Skalarteil bzw. als Vektorteil des Quaternionenprodukts der beiden Vektoren.

273. Division der reellen Quaternionen. Jede Quaternion

$$\mathfrak{p} = a_0 + a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k}$$

läßt sich in die Form

$$\mathfrak{p} = a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\, \mathfrak{a} \tag{10}$$

setzen, wobei $\mathfrak{a}$ den Einheitsvektor des Vektorteils der Quaternion bezeichnet. Wie bei gewöhnlichen komplexen Zahlen ist eine trigonometrische Darstellung möglich:

$$\mathfrak{p} = a(\cos\vartheta + \mathfrak{a}\sin\vartheta); \tag{11}$$

dabei ist

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

a heißt der Betrag der Quaternion.

Die trigonometrische Form ist besonders geeignet, um den reziproken Wert $\mathfrak{p}^{-1}$ der Quaternion $\mathfrak{p}$ anzugeben:

$$\mathfrak{p}^{-1} = \frac{1}{a}(\cos\vartheta - \mathfrak{a}\sin\vartheta); \tag{12}$$

man bestätigt sofort das Bestehen der beiden Gleichungen

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = 1; \quad \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = 1.$$

Unter Verwendung der Maßzahlen a_0, a_1, a_2, a_3 wird

$$\mathfrak{p}^{-1} = \frac{1}{a^2}(a_0 - a_1\mathfrak{i} - a_2\mathfrak{j} - a_3\mathfrak{k}). \tag{12'}$$

Die Einführung des reziproken Wertes einer Quaternion genügt zur Ausführung der Division. Dabei ist die Bestimmung des zweiten Faktors eines Produktes von der des ersten zu unterscheiden. Aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{p}\mathfrak{x} = \mathfrak{q}; \quad \mathfrak{y}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$$

erhält man

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}.$$

Ausführlich geschrieben wird

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{a^2}(a_0 - a_1\mathfrak{i} - a_2\mathfrak{j} - a_3\mathfrak{k})(b_0 + b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}); \tag{13}$$

ähnlich $\mathfrak{y}$; damit ist jede Division auf eine Produktbildung nach (8) zurückgeführt.

Besonders einfach werden die Quotienten zweier Vektoren. Der reziproke Wert des Vektors

$$\mathfrak{v} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$

ist nach (12')

$$\mathfrak{v}^{-1} = \frac{-1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}(a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}) = \frac{-\mathfrak{v}}{v^2},$$

wenn v den Betrag des Vektors $\mathfrak{v}$ bezeichnet.

Aus den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{v}\mathfrak{x} = \mathfrak{w}; \quad \mathfrak{y}\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$$

erhält man die Quaternionen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{w}}{v^2}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{w}\mathfrak{v}^{-1} = -\frac{\mathfrak{w}\mathfrak{v}}{v^2},$$

und durch Ausführung der Quaternionenprodukte

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{v^2}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\times\mathfrak{w}); \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{v^2}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} + \mathfrak{v}\times\mathfrak{w}). \qquad (14)$$

Der Versuch, den Quotienten zweier Vektoren zu definieren, gab Hamilton die Veranlassung zur Erfindung der Quaternionenrechnung.

Daraus, daß jede reelle Quaternion einen bestimmten reziproken Wert besitzt, folgt die Unmöglichkeit des Verschwindens eines Produktes, ohne daß ein Faktor verschwindet. Im System der reellen Quaternionen gibt es keinen Teiler der Null. Nach einem Satz von Frobenius sind die reellen Quaternionen das einzige komplexe Zahlensystem, für das mit Ausnahme des kommutativen Gesetzes alle Gesetze des Rechnens mit skalaren Größen gelten.

274. Die Gaußsche Zahlenebene. Für die Multiplikation zweier Quaternionen vom Betrag Eins, welche kollineare Vektorteile besitzen, gilt, wenn $\mathfrak{k}$ zunächst einen beliebigen Einheitsvektor bedeutet:

$$(\cos\vartheta + \mathfrak{k}\sin\vartheta)(\cos\varphi + \mathfrak{k}\sin\varphi) = \cos(\vartheta+\varphi) + \mathfrak{k}\sin(\vartheta+\varphi).$$

Etwas allgemeiner erhält man für das Produkt der Quaternionen:

$$\mathfrak{p} = a(\cos\vartheta + \mathfrak{k}\sin\vartheta),$$
$$\mathfrak{q} = b(\cos\varphi + \mathfrak{k}\sin\varphi)$$

die Quaternion:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} = a(\cos\vartheta + \mathfrak{k}\sin\vartheta)\,b(\cos\varphi + \mathfrak{k}\sin\varphi)$$
$$= ab\,(\cos(\vartheta+\varphi) + \mathfrak{k}\sin(\vartheta+\varphi)). \qquad (15)$$

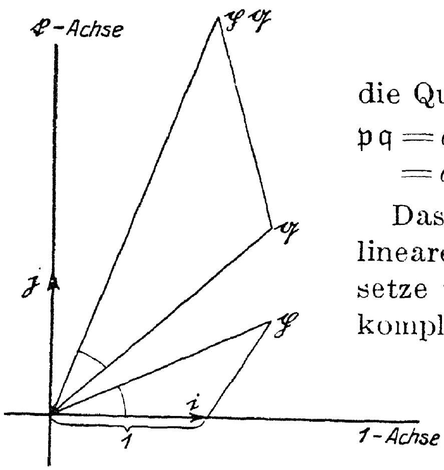


Fig. 75.

Das Rechnen mit Quaternionen mit kollinearen Vektorteilen befolgt dieselben Gesetze wie das Rechnen mit gewöhnlichen komplexen Zahlen; eine Unterscheidung ist nicht möglich, solange man das Zahlensystem mit den Einheiten 1, $\mathfrak{k}$ nicht erweitert. Quaternionen mit kollinearen Vektorteilen können geometrisch ebenso versinnbildlicht werden wie die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene (Fig. 75).

Faßt man $\mathfrak{k}$ als Einheitsvektor in Richtung der z-Achse eines Koordinatensystems auf, so kommt man zu einer geometrischen Darstellung der Quaternion, indem man die Maßzahlen der Einheiten 1 und $\mathfrak{k}$ als x- und y-Koordinaten eines Punktes aufträgt und der Quaternion den Ortsvektor dieses Punktes zuordnet. Das Produkt zweier Quaternionen kann dann erhalten werden, indem man ihre Beträge multipliziert und die zu den Ortsvektoren zugehörigen Richtungswinkel addiert.

Multipliziert man die Gleichung (15) von rechts mit $\mathfrak{i}$, so erhält man:

$$a(\cos\vartheta+\mathfrak{k}\sin\vartheta)\,b\,(\mathfrak{i}\cos\varphi+\mathfrak{j}\sin\varphi)=ab\,(\mathfrak{i}\cos(\vartheta+\varphi)+\mathfrak{j}\sin(\vartheta+\varphi)).$$

Trägt man nun die Vektoren des Systems $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ in demselben Koordinatensystem auf wie die Quaternionen des Systems $1, \mathfrak{k}$, so treten die Quaternionen als *Operatoren von Drehstreckungen* in der Ebene $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ auf.

Aus der Tatsache, daß *die „Vektoren“ der Gaußschen Zahlenebene spezielle Quaternionen* mit im allgemeinen nicht verschwindendem Skalarteil sind, folgt die Unmöglichkeit, die *Vektorrechnung im Raum* so aufzubauen, daß die geometrischen Operationen in der *Gauß*schen Zahlenebene spezielle Fälle von räumlichen Konstruktionen sind.

275. Drehung des Raumes um eine feste Achse. Multipliziert man einen Ortsvektor

$$\mathfrak{r}=(\mathfrak{i}\cos\varphi+\mathfrak{j}\sin\varphi)\,u+\mathfrak{k}z$$

mit einer Quaternion vom Betrag Eins:

$$\cos\vartheta+\mathfrak{k}\sin\vartheta,$$

so erhält man, je nachdem man die Quaternion als linken oder rechten Faktor anbringt, die Ausdrücke:

$$(\cos\vartheta+\mathfrak{k}\sin\vartheta)\,[(\mathfrak{i}\cos\varphi+\mathfrak{j}\sin\varphi)\,u+\mathfrak{k}z]$$
$$=(\mathfrak{i}\cos(\varphi+\vartheta)+\mathfrak{j}\sin(\varphi+\vartheta))\,u+(\mathfrak{k}\cos\vartheta-\sin\vartheta)\,z$$

bzw.

$$[(\mathfrak{i}\cos\varphi+\mathfrak{j}\sin\varphi)\,u+\mathfrak{k}z]\,(\cos\vartheta+\mathfrak{k}\sin\vartheta)$$
$$=(\mathfrak{i}\cos(\varphi-\vartheta)+\mathfrak{j}\sin(\varphi-\vartheta))\,u+(\mathfrak{k}\cos\vartheta-\sin\vartheta)\,z.$$

Durch die beiden Operationen wird die $\mathfrak{i}$- und $\mathfrak{j}$-Komponente des Ortsvektors um den Winkel ϑ bzw. $-\vartheta$ gedreht, während die $\mathfrak{k}$-Komponente in beiden Fällen in dieselbe Quaternion $(\mathfrak{k}\cos\vartheta-\sin\vartheta)z$ übergeführt wird.

Es werden also zwei Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$, die durch eine Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel ω ineinander über-

gehen, in dieselbe Quaternion übergeführt, wenn man den einen von links, den anderen von rechts mit derselben Quaternion $\cos\frac{\omega}{2} + \mathfrak{k}\sin\frac{\omega}{2}$ multipliziert:

$$\left(\cos\frac{\omega}{2} + \mathfrak{k}\sin\frac{\omega}{2}\right)\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'\left(\cos\frac{\omega}{2} + \mathfrak{k}\sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Hieraus erhält man für die Drehung des Raumes mit dem Drehwinkel ω um die z-Achse die für jeden Vektor $\mathfrak{r}$ gültige Formel:

$$\mathfrak{r}' = \left(\cos\frac{\omega}{2} + \mathfrak{k}\sin\frac{\omega}{2}\right)\mathfrak{r}\left(\cos\frac{\omega}{2} - \mathfrak{k}\sin\frac{\omega}{2}\right). \tag{16}$$

Da sich das Rechnen mit Quaternionen mit kollinearen Vektorteilen vom Rechnen mit gewöhnlichen komplexen Zahlen nicht unterscheidet, da insbesondere für die Multiplikation derartiger Quaternionen das kommutative Gesetz gilt, läßt sich die ganze Theorie der Funktionen eines komplexen Arguments auf sie übertragen. So gelten insbesondere folgende Formeln (in denen e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet):

$$\cos\alpha + \mathfrak{k}\sin\alpha = e^{\mathfrak{k}\alpha},$$

$$(\cos\alpha + \mathfrak{k}\sin\alpha)^n = e^{\mathfrak{k}n\alpha},$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathfrak{k}\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = \mathfrak{k}^n = e^{\mathfrak{k}\frac{n\pi}{2}},$$

also

$$\cos\alpha + \mathfrak{k}\sin\alpha = \mathfrak{k}^{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Damit läßt sich die Gleichung (16) für die Drehung des Raumes kürzer schreiben:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{k}^{\frac{\omega}{\pi}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{k}^{-\frac{\omega}{\pi}}. \tag{17}$$

276. Zusammensetzung zweier Drehungen. Führt man nacheinander zwei Drehungen aus, die durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Drehachsen und die Drehwinkel α und β gegeben sind, so wird ein Vektor $\mathfrak{r}$ zunächst in

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a}^{\frac{\alpha}{\pi}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}^{-\frac{\alpha}{\pi}},$$

dann in

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{b}^{\frac{\beta}{\pi}}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{b}^{-\frac{\beta}{\pi}}$$

übergeführt. Das Resultat der Zusammensetzung beider Drehungen ist eine Drehung, die durch

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{b}^{\frac{\beta}{\pi}}\,\mathfrak{a}^{\frac{\alpha}{\pi}}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}^{-\frac{\alpha}{\pi}}\,\mathfrak{b}^{-\frac{\beta}{\pi}}$$

gegeben ist. Sie kann nach (Ziff. 154) durch eine einzige Drehung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{c}^{\frac{\gamma}{\pi}} \mathfrak{r}'' \mathfrak{c}^{-\frac{\gamma}{\pi}}$$

rückgängig gemacht werden. Dabei bedeuten α, β, γ die doppelten Außenwinkel des sphärischen Dreiecks, dessen Ecken durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bestimmt sind.

277. Komplexe Quaternionen. Zwischen den Quaternionen und einem System von vier Einheiten e_{ik} ($\mathfrak{i}, \mathfrak{k} = 1, 2$) mit dem Multiplikationsgesetz (4)

$$\begin{aligned} e_{ik} e_{lm} &= 0 \quad (k \neq l), \\ e_{ik} e_{km} &= e_{im} \end{aligned} \tag{18}$$

besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang.

Definiert man durch lineare Transformation der Basis vier neue Einheiten

$$\begin{aligned} e &= e_{11} + e_{22}, \\ e_1 &= -e_{12} - e_{21}, \\ e_2 &= -e_{11} + e_{22}, \\ e_3 &= e_{21} - e_{12}, \end{aligned} \tag{19}$$

so erhält man die Produkte je zweier der neuen Einheiten durch folgendes Schema:

	e	e_1	e_2	e_3
e	e	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e	e_3	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	e	$-e_1$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	$-e$.

e ist Haupteinheit.

Dieses Schema kann in das Schema (7) für die Multiplikation der Einheiten der Quaternionen übergeführt werden durch eine lineare Transformation mit komplexen Maßzahlen ($i = \sqrt{-1}$):

$$1 = e, \quad \mathfrak{i} = i e_1, \quad \mathfrak{j} = i e_2, \quad \mathfrak{k} = -e_3. \tag{20}$$

Man erkennt also die Identität des durch (18) definierten Systems von 4 Einheiten mit dem System der Quaternionen, wenn man in beiden Systemen komplexe Maßzahlen zuläßt.

Es muß also (Ziff. 270) für die Quaternionen eine charakteristische Gleichung zweiten Grades bestehen. Um sie in einfacher Weise abzuleiten, setzt man eine Quaternion $\mathfrak{p}$ in die Form (10)

$$\mathfrak{p} = a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\, \mathfrak{a}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{p}^2 = a_0{}^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2 + 2a_0\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\,\mathfrak{a}.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{a}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\mathfrak{p}^2 - 2a_0\mathfrak{p} + (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0. \qquad (21)$$

Für komplexe Quaternionen kann der Betrag verschwinden; in diesem Falle reduziert sich die Gleichung auf die beiden ersten Glieder. —

Zwischen den Gesetzen des Rechnens mit komplexen Quaternionen und des Rechnens mit reellen Quaternionen bestehen gewisse Unterschiede. Insbesondere gibt es im System der komplexen Quaternionen Teiler der Null.

Geht man z. B. von dem Produkt

$$\mathfrak{e}_{11}\,\mathfrak{e}_{21} = 0$$

aus, so führen die linearen Transformationen (19) und (20) auf:

$$(1 + i\mathfrak{j})(-\mathfrak{k} + i\mathfrak{i}) = 0.$$

Beide Faktoren der linken Seite dieser Gleichung sind Teiler der Null. Sie sind zugleich die beiden möglichen Typen der Teiler der Null. Der innere Grund für diese Eigenschaft der beiden Quaternionen $1 + i\mathfrak{j}$ und $-\mathfrak{k} + i\mathfrak{i}$ ist das Verschwinden ihres Betrages; denn daraus folgt nach (12′) die Nichtexistenz eines reziproken Wertes und damit die Unmöglichkeit einer eindeutigen Division.

Damit sind diejenigen komplexen Quaternionen, für die sich die charakteristische Gleichung (21) reduziert, als die Teiler der Null erkannt.

278. Nonionen. Als Nonionen werden die komplexen Zahlen eines Systems von 9 Einheiten $\mathfrak{e}_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ bezeichnet, deren Multiplikation dem Gesetz (4)

$$\mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{e}_{lm} = 0 \quad (k \neq l),$$
$$\mathfrak{e}_{ik}\mathfrak{e}_{km} = \mathfrak{e}_{im}$$

genügt. Das System der Nonionen ist mit dem System der Dyaden identisch. Die Einheiten $\mathfrak{e}_{ik}$ sind die früheren Einheiten zweiter Stufe $\mathfrak{i}_i\mathfrak{i}_k$, deren als skalar bezeichnete Multiplikation dem Gesetz

$$\mathfrak{i}_i\mathfrak{i}_k \cdot \mathfrak{i}_l\mathfrak{i}_m = 0 \quad (k \neq l),$$
$$\mathfrak{i}_i\mathfrak{i}_k \cdot \mathfrak{i}_k\mathfrak{i}_m = \mathfrak{i}_i\mathfrak{i}_m$$

genügt.

Im System der Nonionen gibt es eine Haupteinheit

$$I = \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{22} + \mathfrak{e}_{33}.$$

Die Multiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Demnach kann die Division auf zweierlei Weise definiert werden. Jede Division ist eindeutig ausführbar mit allen Nonionen $\Phi = \Sigma a_{ik} e_{ik}$, welche einen bestimmten reziproken Wert besitzen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die früher mit Φ_{III} bezeichnete Determinante der Maßzahlen a_{ik} nicht verschwindet.

Das Verschwinden von Φ_{III} ist charakteristisch für die Teiler der Null; diese sind identisch mit den unvollständigen, also planaren und linearen Dyaden.

Die charakteristische Gleichung, der die Nonionen genügen, ist die Cayley-Hamiltonsche Gleichung dritten Grades. Zu den Nonionen, für welche eine Reduktion der charakteristischen Gleichung eintritt, gehören die Teiler der Null.

279. Duale Vektoren. Man kann ein System komplexer Zahlen von n Einheiten erweitern, indem man zuläßt, daß die Maßzahlen, die bisher als reelle oder gewöhnliche komplexe Zahlen vorausgesetzt sind, selbst allgemeine komplexe Zahlen eines Systems von m Einheiten sind. Das so entstehende System kann als System von mn Einheiten betrachtet werden, die formale Produkte je einer Einheit der beiden Systeme sind.

Das Produkt je zweier Zahlen des erweiterten Systems ist bestimmt und durch Multiplikation je zweier Einheiten der beiden Teilsysteme zu erhalten, wenn man voraussetzt, daß in einem Produkt aus einer Einheit des einen Systems und einer Einheit des anderen Systems die Faktoren vertauschbar sind.

Ein Beispiel für eine derartige Erweiterung bilden die dualen Vektoren. Als duale Zahlen bezeichnet man ein von Clifford eingeführtes Zahlensystem mit den zwei Einheiten 1 und ε, wo $\varepsilon^2 = 0$ ist. Ein Vektor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, dessen Maßzahlen duale Zahlen sind, soll ein dualer Vektor heißen. Nach dem oben geforderten kommutativen Gesetz kann er auch in der Form

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} + \varepsilon \mathfrak{A}'$$

geschrieben werden, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ Vektoren mit reellen Maßzahlen bedeuten.

Für das Produkt zweier dualer Vektoren $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ erhält man, unabhängig von der Produktbildung und deshalb ohne Zeichen geschrieben, die duale Größe:

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varepsilon(\mathfrak{A}'\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}').$$

Die dualen Vektoren sind geeignet, die Liniengeometrie elegant zu behandeln. Die Plückersche Gleichung einer Geraden hat nach Ziff. 23 die Form

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}',$$

wo

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = 0$$

ist (Fig. 76).

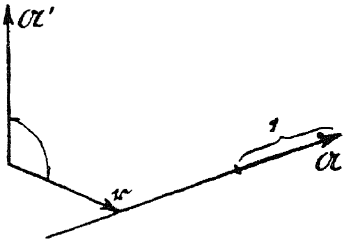


Fig. 76.

$\mathfrak{A}$ soll als Einheitsvektor vorausgesetzt werden:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} = 1.$$

Der duale Vektor

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} + \varepsilon \mathfrak{A}'$$

bestimmt die Gerade vollständig. Er ist ein Einheitsvektor; das skalare Produkt des Vektors mit sich selbst wird

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} + 2\varepsilon \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = 1.$$

Die Darstellung der Geraden des Raumes durch duale Einheitsvektoren führt zu einer Abbildung der Geraden auf die dualen Punkte der Einheitskugel (Studysches Übertragungsprinzip).[1])

Das skalare Produkt zweier dualer Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + \varepsilon(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}')$$

läßt sich geometrisch deuten. Der Winkel der durch $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ bestimmten Geraden soll mit ϑ bezeichnet werden, ihr kürzester Abstand mit l. Die Ortsvektoren der Fußpunkte des kürzesten Abstandes sollen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ heißen. Dann wird

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} &= \cos\vartheta + \varepsilon([\mathfrak{r}\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{s}\mathfrak{B}]) \\ &= \cos\vartheta + \varepsilon[(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \\ &= \cos\vartheta - \varepsilon l \sin\vartheta.\end{aligned}$$

Das skalare Produkt gibt also den kürzesten Abstand und den Winkel der beiden Geraden.

Wegen der Eigenschaft der Cliffordschen Zahlen ist

$$\cos\vartheta - \varepsilon l \sin\vartheta = \cos(\vartheta + \varepsilon l),$$

wie man durch Reihenentwicklung der rechten Seite nachweist. Mithin kann $\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}$ als Cosinus des „dualen Winkels“ $\vartheta + \varepsilon l$ betrachtet werden.

280. Motoren. Von größerer Allgemeinheit als die dualen Einheitsvektoren, die zur Darstellung der Geraden hinreichen, sind die

---

1) Study, Geometrie der Dynamen: Blaschke, Differentialgeometrie I, § 103.

von Study und v. Mises[1]) behandelten Motoren. Man versteht unter einem Motor eine aus zwei Vektoren gebildete extensive Größe, die zur Beschreibung einer Schraubung geeignet ist.

Zur Festlegung einer Schraubung muß vor allem die Achse der Schraubung durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ irgendeines ihrer Punkte und den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ ihrer Richtung gegeben sein. Die Schraubung ist dann festgelegt, wenn zwei beliebige, die Achse senkrecht schneidende Geraden, die durch die Schraubung ineinander übergeführt werden, bekannt sind. Ein solches Geradenpaar kann durch seinen kürzesten Abstand d und seinen Winkel ϑ gegeben werden (Fig. 77).

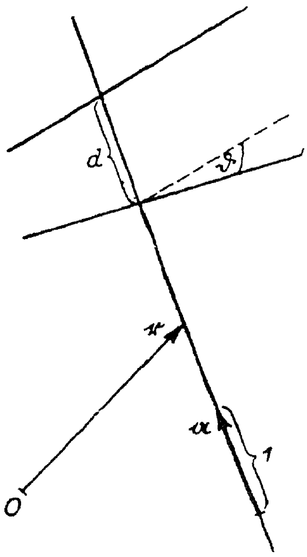


Fig. 77.

Diese geometrischen Daten erlauben die Aufstellung zweier Vektoren (Resultantvektor und Momentvektor)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{a}\,\mathrm{tg}\,\vartheta,$$

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{r} \times \mathfrak{M} + \frac{d}{\mathrm{tg}\,\vartheta}\mathfrak{M},$$

die umgekehrt wieder zur eindeutigen Bestimmung der Schraubung hinreichen. Man kann nämlich $\mathfrak{a}$ und ϑ aus $\mathfrak{M}$ entnehmen. Dann gibt die zweite Gleichung d aus der Beziehung

$$\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}' = \frac{d}{\mathrm{tg}\,\vartheta}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}.$$

Endlich kann, wenn d und ϑ bekannt sind, die zweite Gleichung als Plückersche Gleichung der Schraubungsachse angesehen werden.

Als Motor kann man den dualen Vektor:

$$\mathbf{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \varepsilon \mathfrak{M}'$$

festsetzen oder allgemeiner unter Verwendung einer beliebigen Basis $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die extensive Größe

$$\mathbf{\mathfrak{M}} = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{M} + \mathfrak{e}_2 \mathfrak{M}'.$$

Über das System der dualen Vektoren hinauszugehen, ist namentlich dann nicht zu vermeiden, wenn man dyadische Produkte von Motoren bilden und mit ihnen rechnen will, ohne auf ihre Maßzahlen zurückzugreifen.

---

1) R. v. Mises, Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. 4, 1924, S. 155 ff.

Sachregister.

F

G

H

I

J

K

L